NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012 Jiří Sgall

Párování - dokončení, polytop párování

11. 5. 2012, 12. přednáška *Zapsal: Ivana Valchová, Miroslav Kratochvíl*

Poslední změna: 16. června 2012

1 Perfektní párování

LP:

$$\begin{array}{rll} \text{minimalizuj} & \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e & \\ \text{pro} & x_e \geq 0 & \\ \text{za podmínek} & (\forall v \in V) \quad x(\delta(v)) & = 1 \\ & (\forall S \subseteq E, |S| \text{ lichá}) \quad x(\delta(S)) & \geq 1 \end{array}$$

$D = \delta(S) \ldots$ lichý řez

Duální LP:

$$\begin{array}{rl} \text{maximalizuj} & \sum y_v + \sum Y_D \\ \text{pro} & Y_D \geq 0 \\ \text{za podmínek} & (\forall e = u, v \in E) \bar{c}_e = c_e - y_u + y_v + \sum_{D \ni uv} Y_D \geq 0 \end{array}$$

$E_= = \{e \mid \bar{c}_e = D\}$

Komplementarita:

(i) $M \subseteq E_=$

(ii) $Y_D > 0 \implies |M \cap D| = 1$

Algoritmus

- konstruujeme M, T v $G' \ldots G'$ s pseudovrcholy pro D, $Y_D > 0$
  $M, T \subseteq E_=$
  (y, Y) duálně přípustné
- zvětšujeme M, T
  při zvětšení M zachováme pseudovrcholy
  - když $u, v \in E_=$, kde $u, v \in B(T)$ kontrahujeme cyklus na pseudovrchol v $B(T)$
  - nebo pokud $v \in A(T)$, kde v je pseudovrchol $y_v = 0 \rightarrow$ expandujeme na cyklus
  - nebo změníme duální řešení y takto:

$$y_v := \begin{cases} y_v + \epsilon & v \in B(T) \\ y_v - \epsilon & v \in A(T) \\ y_v & v \notin T \end{cases}$$

kde

$$\epsilon \text{ je minimum z } \begin{cases} \bar{c}_{uv} & u \in B(T), v \notin T, uv \in E \\ \frac{\bar{c}_{uv}}{2} & u, v \in B(T), uv \in E \\ y_v & v \in A(T) \text{ je pseudovrchol} \end{cases}$$

Algoritmus končí, když nalezne perfektní párování. Pokud je ϵ neomezené párování neexistuje.

Věta 1. *Algoritmus nalezne perfektní párování minimální ceny v polynomiálním čase.*

2 Polytop perfektních párování

Definice 2. Polytop perfektních párování
$\mathbb{R}^m \supseteq PM(G) = \text{conv}(\{x \mid x \text{ je charakteristický vektor perfektního párování } G\})$.

Věta 3. *$PM(G)$ je rovno množině přípustných řešení LP.*

Důkaz. $\subseteq$: x je odpovídající párování, tedy splňuje lineární program a tudíž konvexní kombinace taky.
$\supseteq$: obměnou: Předpokládejme, že $\bar{x}$ není v $PM(G)$ $\to$ jde oddělit nadrovinou, pak existují nějaké váhy ($\exists w \in \mathbb{R}^n$) tak, že součet vah $\sum_e w_e \cdot \bar{x}_e < t$ a $\sum_e w_e \cdot x_e \geq t$ pro všechny charakteristické vektory perfektního párování.
x_e^* minimalizuje LP … $min \sum w_e \cdot x_e$ a x_e^* je párování
Optimum LP je alespoň t, ale $\sum w_e \cdot \bar{x}_e < t \to$ není to přípustné řešení. □

Definice 4. Polytop párování $M(G)$ je definován nerovnostmi:
$x_e \geq 0$
$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2}$ ($\forall S \subseteq V$, $|S|$ je liché)
$x(\delta(v)) \leq 1$

Věta 5. *$M(G)$ je konvexní obal charakteristických vektorů párování.*

Pozorování 6. *Dimenze $M(G)$ je m.*

Důkaz. Dokážeme, že je tam $m+1$ afinně nezávislých bodů:
$(0, \cdots, 0) \in M(G)$
$(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in M(G)$
.. LP má samé nerovnosti $\to$ můžeme nějaké vynechat? □

Věta 7. *Minimální popis $M(G)$ je*
$x_e \geq 0 (\forall e \in E)$
$x(\delta(v)) \leq 1 (\forall v \in V)$*, kde* $|\delta(v)| \geq 3$*, nebo* $\delta(v) = \{x, y\}, x, y \notin E$*, nebo* $\delta(v) = \{x\}, |\delta(x)| = 1$
TODO obrázek
$S = \{v, x, y\}$
$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2}$*,* $|S|$ *liché,* $G \restriction S$ *je 2-souvislý a* $(\forall v \in S) G \restriction S \setminus \{v\}$ *má perfektní párování.*

3 Aproximační algoritmy

Definice 8. Algoritmus A pro optimalizační problém je R-aproximační, jestliže pro každou instanci $(\forall I) A(I) \leq R\cdot$ optimální řešení $(OPT(I))$ pro minimalizaci nebo $(\forall I) A(I) \geq \frac{OPT(I)}{R}$ pro maximalizaci.

Př: vážené vrcholové pokrytí
Celočíselný program:

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & \sum_{v \in V} c_v \cdot x_v \\ \text{pro} \quad & c_v \geq 0, x_v \in \{0,1\} \\ \text{za podmínek} \quad & (\forall uv \in E) x_u + x_v \geq 1 \end{aligned}$$

LP:

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & \sum_{v \in V} c_v \cdot x_v \\ \text{pro} \quad & c_v \geq 0, x_v \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & (\forall uv \in E) x_u + x_v \geq 1 \end{aligned}$$

Věta 9. *Existuje 2-aproximační algoritmus pro vážené vrcholové pokrytí, který běží v polynomiálním čase.*

Důkaz. x^* = optimální řešení LP, $U := \{v \mid x_v^* \geq \frac{1}{2}\}$

- U je pokrytí, $uv \in E$
  $x_u^* + x_v^* \geq 1$
  buď $x_u^* \geq \frac{1}{2} \implies u \in U$
  nebo $x_v^* \geq \frac{1}{2} \implies v \in U$
  $\rightarrow$ máme přípustné řešení
- .. ještě zbývá dokázat jak dobré to řešení je:
  víme $\sum c_v \cdot x_v^* \leq OPT(G)$
  $ALG(G) = \sum_{v \in U} c_v \leq 2 \cdot \sum_{v \in U} c_v \cdot x_v^* \leq 2 \cdot OPT(G)$

□