NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012 Jiří Sgall

Úvod, problém lineárního programování

24. 2. 2012, 1. přednáška *Zapsal: Tomáš Musil*
Poslední změna: 16. června 2012

1 Optimalizace

Vznik ve 40. letech, motivace válečná logistika, později teorie her (von Neumann), ekonomie.

Kombinatorická optimalizace

- nejkratší cesty v grafu
- minimální kostry
- párování v grafu
- toky v síti
- (problém obchodního cestujícího)
- (vrcholové pokrytí)

Lineární (matematické) programování

- studium soustav nerovnic a jejich řešení
- optimalizace řešení za podmínek určených soustavou nerovnic

Náplň přednášky

- teorie lineárního programování (dále LP), mnohostěny
- vztah LP a kombinatorické optimalizace
- simplexová metoda, další algoritmy
- párování v grafech
- celočíselné programování
- použití LP pro těžké úlohy
- matroidy

Soustava nerovnic optimalizujeme řešení rovnice omezené soustavou nerovnic

- jedno řešení
- víc řešení
- žádné řešení - žádné přípustné řešení
- žádné řešení - účelová fce neomezená

- rovnice/nerovnice
- proměnné nezáporné/obecné

Převody

rovnice → nerovnice
- substituce (opatrně)
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \to A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$; $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$

nerovnice → rovnice $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \to A\mathbf{x} + z = \mathbf{b}$; $z \geq 0$

obecné proměnné → nezáporné proměnné $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$; $\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \geq 0$

2 Úloha lineárního programování

Definice 1. Úloha LP (ve standardním tvaru) je optimalizační úloha s cílem maximalizovat $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ (porovnání po složkách) přes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Značení:

n počet proměnných

m počet podmínek

Terminologie:

účelová funkce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

přípustné řešení $\mathbf{x}$ splňující $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

optimum přípustné $\mathbf{x}$ s maximální hodnotou $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

nepřípustná úloha LP neexistuje přípustné řešení

neomezená úloha LP existuje přípustné řešení s libovolně velkou hodnotou $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Definice 2. Úloha LP v rovnicovém tvaru je optimalizační úloha maximalizovat $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ přes $\mathbf{x} \in [0, \infty)^n$ (ve světě LP můžeme psát $\mathbf{x} \geq 0$).

Vztah mezi lineární algebrou a LP

lin. algebra	lin. programování
soustavy rovnic	soustavy nerovnic
nad obecným tělesem	nad $\mathbb{R}$
řešení: afinní prostory	řešení: mnohostěny
Gaussova eliminace	simplexová metoda
hodnost, dimenze, ...	dualita

Dopravní problém Máme nějaké zdroje a nějaké cíle. Z každého zdroje se dá dojet do každého cíle, přepravit jednotku zboží mezi zdrojem i a cílem j stojí $c_{i,j}$, zdroje mají kapacitu (a_i), cíle požadavky (b_i).

$$\begin{array}{rlcll}
\text{minimalizuj} & \sum_{i,j} c_{ij}^T x_{ij} & & & \\
\text{pro} & \mathbf{x} \geq 0 & & & \\
\text{za podmínek} & \sum_j x_{ij} & \leq & a_i & \forall i \\
 & \sum_i x_{ij} & \geq & b_j & \forall j
\end{array}$$

případně $\mathbf{x}_{i,j} \in \mathbb{N}$ (celočíselné programování).

Úloha celočíselného programování (IP - integer programming) je optimalizační úloha s cílem maximalizovat $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Smíšené celočíselné programování (MIP - mixed IP) některé proměnné $\in \mathbb{Z}$, některé $\in \mathbb{R}$

Binární celočíselné programování $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$

Hledání nejkratší cesty je dán orientovaný graf s cenami hran $\mathbf{c}_e$, $e \in G$; s, t vrcholy, hledáme nejkratší cestu z s do t.

$$\begin{array}{rlcll}
\text{minimalizuj} & \sum c_e x_e & & & \\
\text{pro} & x_e \in \{0, 1\} & & & \\
\text{za podmínek} & \sum_u x_{uv} - \sum_u x_{vu} & = & -1 & \text{pro } v = s \\
 & & = & +1 & \text{pro } v = t \\
 & & = & 0 & \text{jinak } (\forall v \in V - \{s, t\})
\end{array}$$

Bellman-Ford y_v délka nejkr. cesty $s \to v$

$$\begin{array}{rrcll}
\text{maximalizuj} & y_t - y_s & & & \\
\text{za podmínek} & y_v - y_u & \leq & c_{uv} & \text{pro všechny hrany } uv \\
 & y_s & = & 0 &
\end{array}$$

Fordův algoritmus nastaví vzdálenosti na nekonečna a pak opravuje hodnoty, pokud jsou porušené nerovnosti.
Belmannův dělá totéž, v pořadí které zaručí polynomiální časovou složitost.

Důkaz: (1) přípustné řešení $\to y_t \leq$ délka nejkratší cesty (2) existuje přípustné řešení $y_t =$ délka nejkratší cesty viz důkaz Bellman-Forda

Dualita s programem výše.