Ukázka Lagrangeovy interpolace

Úloha: nalezněte polynom $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ nad tělesem $\mathbb{Z}_{11}$, který prochází body $(1, 5)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 5)$ a $(7, 10)$.

Hledáme tedy a_4, a_3, a_2, a_1 a a_0, které vyhovují soustavě rovnic (nad $\mathbb{Z}_{11}$!!)

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
a_4 & + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 & = & 5 \\
5a_4 & + & 8a_3 & + & 4a_2 & + & 2a_1 & + & a_0 & = & 1 \\
4a_4 & + & 5a_3 & + & 9a_2 & + & 3a_1 & + & a_0 & = & 3 \\
3a_4 & + & 9a_3 & + & 5a_2 & + & 4a_1 & + & a_0 & = & 4 \\
9a_4 & + & 4a_3 & + & 3a_2 & + & 5a_1 & + & a_0 & = & 3 \\
9a_4 & + & 7a_3 & + & 3a_2 & + & 6a_1 & + & a_0 & = & 5 \\
3a_4 & + & 2a_3 & + & 5a_2 & + & 7a_1 & + & a_0 & = & 10
\end{array}
$$

Ve skutečnosti stačí 5 bodů, omezíme se na prvních 5 rovnic (a prvních 5 bodů).

Nejprve spočteme dílčí polynomy $p_1, \ldots, p_5$.
Tyto polynomy splňují: $p_i(i) = 1$ a pro $j \neq i : p_i(j) = 0$.

$$p_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)} = \frac{x^4+8x^3+5x^2+10}{2} = 6x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 5$$
$$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)} = \frac{x^4+9x^3+4x^2+3x+5}{5} = 9x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$$
$$p_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)} = \frac{x^4+10x^3+5x^2+10x+7}{4} = 3x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 8x + 10$$
$$p_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)} = \frac{x^4+8x^2+5x+8}{5} = 9x^4 + 6x^2 + x + 6$$
$$p_5(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)} = \frac{x^4+x^3+2x^2+5x+2}{2} = 6x^4 + 6x^3 + x^2 + 8x + 1$$

Hledaný polynom složíme z pomocných polynomů a hodnot v daných bodech $(i, p(i))$ předpisem:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{5} p(i)p_i(x) = \\ &= 5p_1(x) + p_2(x) + 3p_3(x) + 4p_4(x) + 3p_5(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x + 6 \end{aligned}$$

Zkusíme, jestli nepoužité body $(6, 5)$ a $(7, 10)$ vyhovují $p(x)$:
$p(6) = 3 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 6 = 3 \cdot 9 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 6 = 5$
$p(7) = 3 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 6 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 6 = 10$