

Grupa S_3 a některé její podgrupy

Nosná množina má prvky

$(1)(2)(3)$, $(1)(2,3)$, $(2)(1,3)$, $(1,2)(3)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$

Nazveme je (v tomto pořadí):

$id, p_1, p_2, p_3, r_+, r_-$

Operace skládání:

\circ	id	p_1	p_2	p_3	r_+	r_-
id	id	p_1	p_2	p_3	r_+	r_-
p_1	p_1	id	r_+	r_-	p_2	p_3
p_2	p_2	r_-	id	r_+	p_3	p_1
p_3	p_3	r_+	r_-	id	p_1	p_2
r_+	r_+	p_3	p_1	p_2	r_-	id
r_-	r_-	p_2	p_3	p_1	id	r_+

Inverzní prvky:

p	id	p_1	p_2	p_3	r_+	r_-
p^{-1}	id	p_1	p_2	p_3	r_-	r_+

Podgrupa A_3

Označme $A_3 = (\{id, r_+, r_-\}, \circ)$

Levé i pravé rozkladové třídy jsou shodné, A_3 je normální podgrupou:

$$idA_3 = A_3id = r_+A_3 = A_3r_+ = r_-A_3 = A_3r_- = \{id, r_+, r_-\} = A_3$$

$$p_1A_3 = A_3p_1 = p_2A_3 = A_3p_2 = p_3A_3 = A_3p_3 = \{p_1, p_2, p_3\} = S_3 \setminus A_3$$

Výsledná faktorgrupa má dva prvky a to A_3 a $S_3 \setminus A_3$.

Operace \circ se přenáší následovně:

\circ	A_3	$S_3 \setminus A_3$
A_3	A_3	$S_3 \setminus A_3$
$S_3 \setminus A_3$	$S_3 \setminus A_3$	A_3

Tato faktorgrupa je izomorfní s grupou $(\{1, -1\}, \cdot)$:

\cdot	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Příklad podgrupy, která není normální

Označme $H = \{id, p_1\}$.

H_1 je podgrupou S_3 , protože

$$id \circ id = p_1 \circ p_1 = id \quad \text{a} \quad p_1 \circ id = id \circ p_1 = p_1.$$

Levé rozkladové třídy jsou:

$$idH = p_1H = \{id, p_1\}$$

$$p_2H = r_-H = \{p_2, r_-\}$$

$$p_3H = r_+H = \{p_3, r_+\}$$

Na tyto tři třídy se ale nepřenáší operace \circ :

$$r_- \in p_2H, \text{ ale } r_- \circ r_- = r_+ \notin (p_2 \circ p_2)H = H$$

Pogrupa H ovšem není normální, např.:

$$p_2H = \{p_2, r_-\} \neq \{p_2, r_+\} = Hp_2.$$