Úvod do aproximačních a pravděpodobnostních algoritmů
NDMI084 – ZS 2014 – Jiří Sgall

Domácí úkol 1 – 7. října

Termín: 19. října

Zvolte si přezdívku (pro zveřejnění výsledků na webu) a řešení alespoň na jednom listě jak jménem tak přezdívkou; ostatní listy a další úkoly podepište jednou z variant.
Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.

(1) Předpokládejme, že je vhodným způsobem dáno reálné číslo $x \in (0, 1)$. Dále je k dispozici posloupnost nezávislých náhodných bitů s uniformním rozdělením. Navrhněte (pod)program, který vrátí ANO s pravděpodobností přesně x a NE s pravděpodobností $1-x$. Uveďte, kolik bitů z posloupnosti čte Váš podprogram v nejhorším případě a jaký je průměrný počet přečtených náhodných bitů. Rozlište tři varianty:
(a) x je tvaru $i/2^n$.
(b) x je racionální, třeba 1/3 nebo 7/13.
(c) x je iracionální, třeba $1/e$.

(2) V problému MAX-SAT je dána CNF formule a cílem je najít přiřazení proměnným takové, že je co nejvíce klauzulí splněno. Uvažte následující algoritmus: Vezměme dvě přiřazení, jedno nastaví všechny proměnné na 0, druhé nastaví všechny proměnné na 1. Výstupem je lepší z těchto dvou přiřazení.

(a) Jaký je aproximační poměr tohoto algoritmu? Měli byste najít přesnou odpověď, tj. konstantu R, důkaz, že algoritmus je R-aproximační a příklad, ukazující, že algoritmus není r-aproximační pro žádné $r < R$.

(b) Předpokládejme, že uvažujeme libovolný algoritmus, který zkouší konstantně mnoho různých přiřazení. (Tj. jejich počet nezávisí na vstupu. Za jedno přiřazení považujeme nekonečnou posloupnost hodnot, je ho tedy možné použít pro formule s libovolným počtem proměnných.) Jakého nejlepšího aproximačního poměru můžete dosáhnout?

(3) Najděte příklad grafů, které ukazují, že (i) algoritmus pro metrický TSP používající obcházení minimální kostry není lepší než 2-aproximační a (ii) Christofidesův algoritmus pro metrický TSP používající není lepší než 3/2-aproximační.

(4) Máme deset žetonů s hodnotami 1 až 10. Když je rozdělíme na dvě skupiny zvlášť liché a zvlášť sudé, bude průměr skupin 5 pro liché a 6 pro sudé. Je možné změnit rozdělení do skupin tak, že se průměr obou skupin zvýší?

Pokud ne, zdůvodněte to. Pokud ano, tak to také zdůvodněte.