Kombinatorické etudy 4 – LS 2013/2014

1. (3.18) V soutěži ve skoku dalekém opět skáče n skokanů v náhodném pořadí (a žádní dva neskočí stejně). Sázková kancelář přijímá pouze jeden druh sázek: po provedeném skoku si lze vsadit na to, že závodník co právě skočil bude celkový vítěz. Protože jsme přišli pozdě, můžeme sázet až po k-tém skoku. Jaká je pravděpodobnost výhry? (Máme jenom jeden tip.)

2. (4.24) Buď B antisymetrická matice ($A^T = -A$). Pak $\det B = (\operatorname{Pf} B)^2$.
Pfafián antisymetrické matice je definován jako

$$\sum_{\pi \in S_{2n}} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(2i-1),\pi(2i)} \,.$$

3. (9.27)

(a) Sestrojte graf s barevností k bez trojúhelníků.

(b) * Sestrojte graf s barevností k bez 3-, 4- a 5-cyklů.

(c) Sestrojte graf s barevností alespoň k a bez lichých cyklů kratších než l (sudé cykly mít může).

Pozor, sestrojit neznamená jen dokázat, že existuje!

4. (10.34 – Turánova věta)
Buď G graf s mk vrcholy a více než $\binom{k}{2}m^2$ hranami. Dokažte, že G obsahuje K_{k+1}. Zobecněte pro případ $n = mk + r$, $1 \le r < k$.

5. (14.14 – zůstalo z minula, už umíme dokázat první část z nápovědy)*

(a) Mějme opět obarveny k barvami všechny podmnožiny n-prvkové množiny S, přičemž $n \ge N(k,t)$. Ukažte, že existují disjunktní množiny $A_1, B_1, \dots, A_t, B_t$ takové, že pro libovolnou pevnou posloupnost $1 \le i_1 < \cdots < i_\ell \le t$ všechna sjednocení ve tvaru $C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_\ell}$ (kde každé C_i je jedno z A_i, B_i nebo $A_i \cup B_i$) mají stejnou barvu.

(b) Dokažte, že pro libovolná k, r existuje $n = n(k,r)$ s následující vlastností: kdykoli je množina všech podmnožin n-prvkové množiny S obarvena k barvami, tak existují neprázdné disjunktní množiny $X_1, \dots, X_r \subseteq S$ takové, že všechna neprázdná sjednocení některých z nich mají tutéž barvu.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`