Kombinatorické etudy 4 – LS 2013/2014

1. (3.17) V soutěži ve skoku dalekém skáče n skokanů v náhodném pořadí. Jaká je střední hodnota počtu rekordů? Jaká je pravděpodobnost, že nastane právě k rekordů?

2. (4.24) Buď B antisymetrická matice ($A^T = -A$). Pak $\det B = (\operatorname{Pf} B)^2$.
Pfafián antisymetrické matice je definován jako

$$\sum_{\pi \in S_{2n}} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(2i-1),\pi(2i)} \,.$$

3. (9.26)

1. Buď G orientovaný graf a $L(G)$ jeho hranový graf. Dokažte, že $\chi(L(G)) \geq \lceil \log_2 \chi(G) \rceil$. Navíc hranám G je možné případně změnit orientaci tak, že platí rovnost.

2. Pokud G je symetricky orientovaný graf (hrany jde rozdělit do orientovaných 2-cyklů), tak platí

$$\chi(L(G)) \leq k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \chi(G) \leq \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}.$$

4. (10.33) Počet trojúhelníků v grafu s n vrcholy a m hranami je alespoň

$$\frac{4m}{3n}\left(m - \frac{n^2}{4}\right)$$

5. (14.14)*

1. Mějme opět obarveny k barvami všechny podmnožiny n-prvkové množiny S, přičemž $n \geq N(k,t)$. Ukažte, že existují disjunktní množiny $A_1, B_1, \ldots, A_t, B_t$ takové, že pro libovolnou pevnou posloupnost $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq t$ všechna sjednocení ve tvaru $C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_\ell}$ (kde každé C_i je jedno z A_i, B_i nebo $A_i \cup B_i$) mají stejnou barvu.

2. Dokažte, že pro libovolná k, r existuje $n = n(k,r)$ s následující vlastností: kdykoli je množina všech podmnožin n-prvkové množiny S obarvena k barvami, tak existují neprázdné disjunktní množiny $X_1, \ldots, X_r \subseteq S$ takové, že všechna neprázdná sjednocení některých z nich mají tutéž barvu.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`