Kombinatorické etudy 11 – LS 2013/2014

1. (3.22)
(a) Buďte $x_1, \dots, x_n$ reálná čísla. Pro každou permutaci π množiny $\{1, \dots, n\}$ definujme

$$a(\pi) = \max\{0, x_{\pi(1)}, x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)} + \dots + x_{\pi(n)}\}\,.$$

Uvažme cykly C_1, …, C_k permutace π a položme

$$b(\pi) = \sum_{l=1}^{k} \max\bigl(0, \sum_{j \in C_l} x_j\bigr)$$

Ukažte, že $\{a(\varrho) \mid \varrho \in S_n\}$ a $\{b(\pi) \mid \pi \in S_n\}$ jsou stejné (jako multimnožiny).
(b) m chlapců a m dívek při tanci vytvoří náhodné kruhy (v jednom kruhu může být libovolný počet tanečníků(-ic), i dva či dokonce jen jeden). Dokažte, že pravděpodobnost, že v každém kruhu je stejný počet chlapců a dívek, je přesně $\frac{1}{m+1}$.

2. (4.29)* Označme a_n počet způsobů, jak lze pokrýt šachovnici $2n \times 2n$ pomocí domin 2×1. Dokažte vzorce

(a) $a_n = 2^{2n^2} \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^n \bigl(\cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} + \frac{l\pi}{2n+1}\bigr)$

(b) $$a_n = 2^n \begin{vmatrix} \binom{2n}{0} & \binom{2n-2}{2} & \binom{2n-4}{4} & \cdots & & \\ 0 & \binom{2n}{0} & \binom{2n-2}{2} & \cdots & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & & \cdots & \binom{2n}{0} & \binom{2n-2}{2} & \cdots \\ \binom{2n-1}{1} & \binom{2n-3}{3} & \binom{2n-5}{5} & \cdots & & \\ 0 & \binom{2n-1}{1} & \binom{2n-3}{3} & \cdots & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & & \cdots & \binom{2n-1}{1} & \binom{2n-3}{3} & \cdots \end{vmatrix}^2$$

Matice má $n-1$ sloupců, $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ řádků v prvním bloku, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ řádků v druhém bloku.

(c) Spočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$.

3. (9.33) Které z předchozích úloh na tomto místě popisují konstrukci perfektních grafy? (Graf G je perfektní, pokud pro každý indukovaný podgraf H platí, že $\chi(H) = \omega(H)$.)

4. (10.37) Nechť graf s n vrcholy a m hranami neobsahuje žádný podgraf $K_{r,r}$. Dokažte, že $m < Cn^{2-\frac{1}{r}}$, kde C závisí jen na r.

5. (14.14 – už to skoro máme!)*

(a) Mějme opět obarveny k barvami všechny podmnožiny n-prvkové množiny S, přičemž $n \geq N(k,t)$. Ukažte, že existují disjunktní množiny $A_1, B_1, \dots, A_t, B_t$ takové, že pro libovolnou pevnou posloupnost $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq t$ všechna sjednocení ve tvaru $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_\ell}$ (kde každé C_i je jedno z A_i, B_i nebo $A_i \cup B_i$) mají stejnou barvu.

(b) Dokažte, že pro libovolná k, r existuje $n = n(k,r)$ s následující vlastností: kdykoli je množina všech podmnožin n-prvkové množiny S obarvena k barvami, tak existují neprázdné disjunktní množiny $X_1, \dots, X_r \subseteq S$ takové, že všechna neprázdná sjednocení některých z nich mají tutéž barvu.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`