Kombinatorické etudy 1 – LS 2013/2014

1. (3.16) Buď π náhodná permutace $[n]$. Označme I_i počet indexů $1 \le j \le i$, pro něž $\pi(i) \le \pi(j)$. Pak $I_1, \ldots, I_n$ jsou náhodné veličiny. Ukažte, že jsou nezávislé.

2. (4.21) Buď G bipartitní (multi)graf s partitami $\{u_1, \ldots, u_n\}$ a $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Označme $a_{i,j}$ počet hran mezi u_i a v_j a položme $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$. Pak počet perfektních párování v G je permanent matice A.

Permanent je definovaný jako determinant, ale "bez minus jedniček".

3. (9.25)

Jaká je barevnost

(a) $L(K_n)$ – tj. hranového grafu K_n

(b) jeho doplňku

(c) hranového grafu pro symetricky orientovaný graf vzniklý z K_n nahrazením každé hrany orientovaným dvojcyklem.

Pokud $G = (V, E)$ je neorientovaný graf, tak hranový graf $L(G)$ má vrcholy E a hrany $\{e, f\}$ kdykoli e a f mají společný vrchol. Orientovaný graf $G = (V, E)$ má také vrcholy E, orientované hrany však vedou jen z (u, v) do (v, w) (tj. závisí na orientaci).

Pro účely barevnosti orientace nehraje roli.

4. (10.30 – na zahřátí) Graf G má n vrcholů, m hran a žádný trojúhelník. Ukažte, že $m \le n^2/4$.

5. (14.11) Rozdělíme čísla $1, 2, \ldots, n$ na k skupin. Ukažte, že když je $n \ge k!e$, tak jedna ze skupin obsahuje čísla x, y, z, pro která platí $x + y = z$.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`