Stručné poznámky z MA pro I — LS 2013/14

Robert Šámal

11. června 2014

Tento text se vztahuje k předmětu NMAI055. Najdete zde soupis definic, vět a něco málo dalších poznámek. Co zde naopak není, jsou důkazy. (Avšak pokud důkaz na přednášce nebyl, je to zde napsáno.) Pokud jste důkaz "nechytili" na přednášce, poraďte se s kolegou nebo doporučenou literaturou. Pomocí vodorovných čar jsou odděleny jednotlivé přednášky.
Pokud narazíte na nějakou nesrovnalost, dejte mi prosím vědět. (Zatím se s připomínkami ozvali Dušan Rychnovský, Ondřej Kupka, Ondřej Pilát, Martin Hanes, Roman Říha, Martin Petruňa, Ondřej Odcházel, Stanislav Kučera, Michal Staruch, Ondřej Hlavatý. Děkuji!)

4.7 Průběh funkce

Poznámky o tom, k čemu je dobré zkoumat průběh funkce. Zjevně užitečné je najít minimum nějaké funkce. Někdy se hodí i složitější vlastnosti, jako je konvexita. Už definice konvexity je zajímavé tvrzení, uvedeme si trochu upravené znění. Napřed si uvědomte, že pro $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda \in [0,1]$ popisuje výraz $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ bod v intervalu $[x_1, x_2]$ (resp. $[x_2, x_1]$).[1] Dále výraz $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ je y-ová souřadnice odpovídajícího bod na úsečce, sečně grafu funkce $f(x)$. TODO: OBRAZEK
Funkce je tedy konvexní, pokud

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\,.$$

Zobecnění tohoto vztahu dává následující užitečná věta.

L Věta 4.25 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť f je funkce konvexní na intervalu J. Nechť $x_1, \ldots, x_n$ jsou prvky J, nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kladná čísla se součtem 1. Pak*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)\,.$$

(Pro konkávní funkce platí nerovnost opačná.)

(Lehce indukcí: pro $n = 2$ jde přímo o definici konvexity. Také je to názorné z obrázku – těžiště leží uvnitř konvexního obalu.)

L Věta 4.26 (AG-nerovnost)**.** *Nechť $x_1, \ldots, x_n$ jsou z $(0, \infty)$. Pak*

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\,.$$

(Lehký důsledek Jensenovy nerovnosti pro konkávní funkci $f(x) = \log x$.)

K zamyšlení: Jak známo, pravá strana výše uvedené nerovnosti se nazývá *aritmetický průměr*. O něco méně známo je, že levá strana se nazývá *geometrický průměr*. Zkuste najít (aspoň pro $n = 2$) geometrický význam tohoto čísla.

4.8 Taylorův polynom

Často je užitečné umět hodnotu funkce poblíž "pěkného bodu" (např. $\sin 0.1$) aproximovat přiměřeně přesně pomocí nějakého snadno vyčíslitelného výrazu. Napřed snadná definice – spíš názvosloví a značení:

Definice. *Nechť f je reálná funkce, pak symbolem $f^{(n)}$ značíme n*-tou derivaci f. *Formálně:*

[1] Funguje to i pro vektory x_1, x_2, proto se také lineární kombinaci tohoto typu – s nezápornými koeficienty co se sečtou na 1) říká *konvexní kombinace*.

- $f^{(0)} := f$
- $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$

Definice. *Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom*

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.

Je lehké ověřit následující dvě pozorování:

- $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$
- $T_n^{f,a}$ a f maji společnou hodnotu a k-tou derivaci v bodě a pro $k \leq n$

Definice.
- *$f = O(g)$ pokud $\exists C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta)\quad f(x) \leq Cg(x)$.*
- *$f = o(g)$ pokud $\forall c > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta)\quad f(x) \leq cg(x)$, (ekvivalentně – pokud g není nula – $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*
- *Analogicky lze definovat symboly ω, Ω, θ, Θ ale v analýze je asi nevyužijeme.*

L Věta 4.27 (Taylorův polynom – Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a)$ existuje vlastní. Pak*

$$f(x) = T_n^{f,a} + o((x-a)^n)\,.$$

(Důkaz pro případ $f^{(n)}$ je spojitá v a – indukce podle n a l'Hospitalovo pravidlo. Potřebujeme dokázat

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

k čemuž se l'Hospital náramně hodí.)

Poznámka.
- *Taylorův polynom je jediný polynom stupně n, pro který platí předchozí věta.*
- *Aplikace:*

  $$\frac{e^x - e^{2x}}{x} = \frac{(1 + x + o(x)) - (1 + 2x + o(2x))}{x} = -1 + \frac{o(x) - o(2x)}{x} = -1 + o(1)$$

  tudíž $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x} = -1.$
- *Z předchozí věty ale nezískáme žádné konkrétní hodnoty – nezjistíme, jak moc se liší* $\mathrm{e}^{0.1}$ *od* 1.1*. K tomu bude sloužit následující věta.*

T Věta 4.28 (Taylorův polynom s Lagrangeovým tvarem zbytku)**.** *Nechť funkce f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci v nějakém otevřeném intervalu obsahujícím $[a,x]$. Pak existuje $\xi \in (a,x)$ tak, že*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}\,.$$

(Důkaz až na další přednášce.)

Poznámka. *1) Čili v* $(n+1)$*-ním členu nebereme derivaci v bodě* a*, ale ve vhodném* $\xi \in (a,x)$ *–* ξ *záleží na* x*!*
2) Pro rozumné funkce tento odhad vylepšuje výše uvedené lemma, neboť říká, že $f(x) = T_n^{f,a}(x) + O((x-a)^{n+1})$*.*
3) Zejména však tato věta umožňuje odhadnout, jaké chyby se pro konkrétní x *dopouštíme. (oproti Větě 4.27, která dává jen limitní výsledek). Můžete tedy např. odhadnout* $\sin 0.1$ *pomocí (ověřte!)* $0.1 - 0.1^3/3!$ *s chybou maximálně* $0.1^5/4!$.

L Věta 4.29 (Rolleova věta)**.** *Nechť* f *je spojitá na intervalu* $[a,b]$*,* $f'(x)$ *existuje pro každé* $x \in (a,b)$ *a* $f(a) = f(b)$*. Pak existuje* $\xi \in (a,b)$ *tak, že* $f'(\xi) = 0$*.*

L Věta 4.30 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť je funkce* f *spojitá na intervalu* $[a,b]$ *a má derivaci v každém bodě intervalu* (a,b)*. Pak existuje* $\xi \in (a,b)$ *tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Odsud dokážeme vztah monotonie a derivace.

Věta 4.31 (zobecněná Rolleova věta)**.** *Nechť* f *je spojitá na intervalu* $[a,b]$*,* $f^{(n+1)}(x)$ *existuje pro každé* $x \in (a,b)$*,* $f(a) = f(b) = 0$ *a dále* $f^{(k)}(a) = 0$ *pro* $k \le n$*. Pak existuje* $\xi \in (a,b)$ *tak, že* $f^{(n+1)}(\xi) = 0$*.*

(Důkaz přenechán laskavému čtenáři jako cvičení.)

Důsledek: pěkný důkaz Taylorovy věty s Lagrangeovým tvarem zbytku.

Kapitola 5

Primitivní funkce

Motivační otázky: když známe pro každý čas přítok vody do bazénu, jak zjistit, kolik v něm bude vody za hodinu (pokud se přítok mění)? jak zjistit obsah pod sinusoidou (řekněme na intervalu $[0, \pi]$)?
Podívejme se podrobněji na druhý problém: Jeden přístup je "brutálně informatický": sinus nasamplujeme, třeba pravidelně, a správně sečteme. Pokud bude krok samplování $x = \pi/n$, dostaneme součet

$$x(\sin 1x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx)\,.$$

Podle vzorce, který snad znáte ze cvičení v ZS je tento součet roven

$$x \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}\,.$$

Spočteme-li limitu pro $x \to 0$, dostaneme snadno (**K zamyšlení:** ověřte!), že samplované součty se blíží ke 2.
Tento postup dává správný výsledek, má však dvě vady: Jednak, není jasné, jestli naše volba samplování výsledek neovlivnila. (**K zamyšlení:** Vymyslete funkci, která pomocí výše uvedeného postupu má "součet" 0, ale přitom to vypadá, že by spíš měla mít "součet" 1. Tip: neměla by být spojitá!) Toto však vyjasníme, až budeme zkoumat tzv. Riemannův integrál. Vážnější vada je to, že jsme uměli sečíst příslušný výraz s n siny jen díky klice ...
Půjdeme tedy na to jinak, plochu budeme zkoumat obecněji pod křivkou sinus na intervalu $[0, x]$ (to se bude značit $\int_0^x \sin x \,\mathrm{d}x$). Všimneme si, že rychlost, kterou tato plocha přibývá je (v bodě x) rovna $\sin x$. Čímž jsme zpátky u první otázky s přítokem vody do bazénu, nebo obecněji u primitivní funkce.

5.1 Základní vlastnosti

Definice. *Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je* primitivní funkce *k funkci f, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$.*

L Věta 5.1 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)**.** *Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G(x) = F(x) + c$ pro všechna $x \in I$.*

Poznámka. *Takže, známe-li jednu primitivní funkci F k f, známe všechny: je to množina $\{F(x) + C; C \in \mathbb{R}\}$. Tuto množinu značíme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Píšeme*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,.$$

Příklad. *Přímo z definice snadno spočteme primitivní funkce k x^n, e^x, $\sin x$, $\cos x$, atd., protože přímo vidíme, že se jedná o "tabukovou" derivaci jiné funkce. Někdy (často) ale v $f(x)$ přímo neobjevíme derivaci jiné funkce. Pro takové případy odvodíme několik vět a postupů, co dělat. Bohužel (na rozdíl od derivace) tyto postupy nefungují vždy.*

Poznámka. *1) Funkce signum nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci.*
2) Obecněji: Pokud f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci, pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subseteq I$ je $f(J)$ interval. (Jinak řečeno: nabývá mezihodnot.) **K zamyšlení:** *Zkuste se přemluvit, že by to tak mělo být, tj. že derivace libovolné funkce má Darbouxovu vlastnost.*
3) Pro každou spojitou funkci existuje primitivní funkce (to není vidět, ale brzy to dokážeme). Funkce e^{-x^2} je spojitá na $\mathbb{R}$, takže má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Ta ale nejde vyjádřit pomocí elementárních funkcí (sinus, cosinus, exponenciála, logaritmus, ...). Protože tato primitivní funkce je užitečná (ve statistice), zavádí se tzv. chybová funkce

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \,\mathrm{d}t\,.$$

(Co je $\int_0^x$ jsme ještě nedefinovali, vydržte :–)
4) Primitivní funkce k jakékoli funkci ma všude vlastní derivaci, tedy je spojitá.
5) **K zamyšlení:** *Zkuste vymyslet nespojitou funkci, která má primitivní funkci. Jinak řečeno, najděte funkci (třeba na $\mathbb{R}$), která má v každém bodě derivaci, avšak tato derivace není spojitá. (VAR: Prozradit konkrétní funkci ...)*

L Věta 5.2 (linearita primitivní funkce)**.** *Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na otevřeném intervalu I a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha f + \beta g$ má na I primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.*

T Věta 5.3 (1. o substituci při výpočtu prim. funkce)**.** *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě z (α, β) vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) \quad \textit{na } (\alpha, \beta)\,.$$

T Věta 5.4 (2. o substituci při výpočtu prim. funkce)**.** *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) vlastní nenulovou derivaci a $\varphi\big((\alpha, \beta)\big) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) \quad \textit{na } (\alpha, \beta)\,.$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) \quad \textit{na } (a, b)\,.$$

(V důkazu druhé časti jsme použili (a nedokázali), že φ musí být monotónní.)

Příklad. *1) $\int \sin 2t\,\mathrm{d}t$: Vezmeme $f(x) = \sin x$, $\varphi(t) = 2t$, $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Víme, že primitivní funkce k $f(x)$ je $F(x) = -\cos x$. Podle první části věty tedy platí, že $\int \sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos 2t$.*

2) $\int te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$: Na tomto příkladu si ukážeme jiný zápis; méně formální, avšak praktičtější:

- *substituujeme $x = -t^2$ (podrobněji, x je funkce t, a $x(t) = -t^2$).*

- *Platí $x'(t) = -2t$. Můžeme psát $\frac{dx}{dt} = -2t$, neboli*
- $dx = -2tdt$.
- *Můžeme tedy psát (protože "by to tak mělo být", resp. protože to plyne z věty o substituci, kde ověříme podmínky na funkci $x(t) = \varphi(t)$):*

$$\int te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{2}\int e^{-t^2}(-2t)\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{2}\int e^x\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}e^x + C = -\tfrac{1}{2}e^{-t^2} + C$$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$*: Zde použijeme druhou větu o substituci. Idea je, že dosadíme* $x = \sin t$*, čímž se výraz pod odmocninou zjednoduší.*

L Věta 5.5 (integrace per partes)**.** *Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce k g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{na } I,\ \text{MLPSS.}$$

K zamyšlení: Nakreslete výstižný obrázek!

Příklad. $\int xe^x\,\mathrm{d}x$

5.2 Integrace racionálních funkcí

Definice. Racionální funkcí *rozumíme podíl dvou polynom P/Q, kde Q není nulový polynom.*

Překvapivé a pro mnoho výpočtů užitečné je to, že každou racionální funkci můžeme psát v jistém speciálním tvaru – nebýt toho, že v reálných číslech nelze odmocňovat záporná čísla, tak by ten speciální tvar byl součet výrazů typu $\frac{1}{(x-x_i)^k}$. Připomeňme si napřed některé vlastnosti polynomů.

(a) Nechť P je polynom. Pak $P(a) = 0$ právě když existuje polynom Q tak, že $P(x) = (x-a)Q(x)$. (Jeden směr je zřejmý, pro druhý je třeba dělit polynom $P(x)$ polynomem $x - a$ a všimnout si, jaký může být zbytek.)

(b) (základní věta algebry) Nechť $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Pak existují čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ tak, že

$$P(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n),\ x \in \mathbb{C}\,.$$

Přestože se tomuto tvrzení říká základní věta algebry, algebraické je na něm jen tvrzení z minulého bodu (a). Pak je třeba dokázat, že v $\mathbb{C}$ má každý polynom aspoň jeden kořen, což není těžké, ale z časových důvodů vynecháme.

(c) Věta by se dala dokázat např. takto: zkusíme x vyjádřit ve tvaru $x = Re^{it}$, kde R je reálné a $t \in [0, 2\pi]$. Jako jeden extrém dosadíme $R = 0$, jako druhý extrém R hodně velké (a t necháme probíhat interval $[0, 2\pi]$). Co můžete říct o hodnotách $P(x)$ pro takovéto volby x? Plyne odsud něco pro hodnotu $P(x)$ v bodech mezi?

(d) Bohužel nelze zaručit, že kořeny x_i budou reálné, ani když koeficenty a_i jsou všechny reálné – viz např. polynom $x^2+1=(x-i)(x+i)$.

(e) O komplexních kořenech polynomů: Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen násobnosti k.

(f) O polynomech s reálnými koeficienty: Každý polynom s reálnými koeficienty lze napsat jako součin polynomů lineárních (tj. $x+c$) a kvadratických (tj. x^2+ax+b) **s reálnými koeficienty** a příp. konstanty.

Z předchozích úvah plyne, že každý polynom Q lze psát ve tvaru, jaký požaduje následující důležitá věta.

T Věta 5.6 (o rozkladu na parciální zlomky)**.** *Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

1. *stupeň P je menší než stupeň Q*
2. *$Q(x)=\prod_i (x-x_i)^{p_i}\prod_j (x^2+a_jx+b_j)^{q_j}$ kde žádný kvadratické členy nemá kořen, všechny jsou navzájem různé, i všechny lineární členy jsou navzájem různé. Samozřejmě, a_j, b_j, x_i jsou reálná čísla, p_i, $q_j \geq 1$ přirozená čísla.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_{i,k}$, $B_{j,k}$, $C_{j,k}$, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_i\sum_{k=0}^{p_i}\frac{A_{i,k}}{(x-x_i)^k}+\sum_j\sum_{k=0}^{q_j}\frac{B_{j,k}x+C_{j,k}}{(x^2+a_jx+b_j)^k}$$

(Důkaz jen pro případ, kdy $Q(x)$ má všechny kořeny reálné a navzájem různé.)

Jak tedy integrovat racionální funkci?

1. Částečně vydělíme, čímž dostaneme polynom a zlomek, v němž čitatel má nižší stupeň než jmenovatel.
2. Tento zlomek podle výše uvedené věty rozložíme na součet parciálních zlomků.
3. S těmi naložíme následujícně:
   - $\int \frac{1}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C$
   - (pro $k>1$) $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} = \frac{1}{-k+1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}$
   - $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C$ (substituce)
   - (pro $k>1$) $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} = \frac{1}{-k+1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + C$
   - $\int \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$
   - (for $k>1$) $\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}} = \frac{1}{2k}\frac{x}{(1+x^2)^k} + \left(1-\frac{1}{2k}\right)\int\frac{1}{(1+x^2)^k}$
   - Integrály s obecným kvadratickým vzorcem ve jmenovateli a konstantou v čitateli zvládneme úpravou na čtverec:

     $$x^2+px+q=(x+p/2)^2+\left(q-(p/2)^2\right)=k\left(\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{k}}\right)^2+1\right)$$

     (kde značíme pro jednoduchost $k=q-(p/2)^2$). Pak substitucí $u=\frac{x+p/2}{\sqrt{k}}$ to převedeme na jeden z předchozích dvou typů. Tím dostaneme následující
   - $\int \frac{1}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)$

5.3 Doporučené substituce

Jednoduché (1) Nechť $a \in \mathbb{R}$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(e^{ax}\right) \mathrm{d}x$$

používáme substituci

$$t = e^{ax}, \qquad \mathrm{d}t = a e^{ax}\,\mathrm{d}x$$

(2) Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(\log x\right) \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

používáme substituci

$$t = \log x, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Trigonometrické funkce

Definice. Racionální funkcí dvou proměnných *rozumíme podíl dvou polynom* $R(a,b) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$*, kde* $P(a,b)$ *a* $Q(a,b)$ *jsou polynomy dvou proměnných a* Q *není identicky nulový.*

(3) Při integraci funkcí

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

používáme substituce:

1. pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \cos x$.

2. pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \sin x$.

3. pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Bude se nám hodit, že $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ a $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$. Tudíž $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

4. vždy funguje substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Bude se nám hodit, že $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Tudíž $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Proč to funguje: (jen pro případ 1., ostatní jsou obdobné) Pokud platí $R(-s,c) = -R(s,c)$, tak $R(s,c)$ lze napsat jako podíl dvou polynomů $R(s,c) = \frac{P(s,c)}{Q(s,c)}$, přičemž jeden z polynomů P, Q je *sudý v* s (tj. obsahuje jen sudé mocniny s), druhý *lichý v* s (tj. obsahuje jen liché mocniny s). Odsud vidíme, že $R(s,c) = f(s^2,c) \cdot s$ pro vhodnou funkci f. Činitel $s = \sin x$ nám dá derivaci cosinu, kterou potřebujeme do substituce a to, že všechny výskytu sinu jsou v sudé mocnině nám umožní jej vyjádřit pomocí cosinu (a bez odmocňování! – to by nás totiž nutilo zkoumat, jaké má sinus na kterém intervalu znaménko a na jiném by výpočet nefungoval).
Dobrá rada: Pokud je možné použít (i) nebo (ii), je výpočet většinou nejsnazší. Substituci (iv) je dobré používat jen, když nelze použít (i), (ii) ani (iii).
Poznámka: Po substituci $t = \tan x$ a $t = \tan \frac{x}{2}$ je většinou nutné primitivní funkci po formálním spočtení ještě ‘lepit’: výpočet totiž funguje jen na intervalech, kde je $\tan x$, resp. $\tan x/2$ definovaný, ačkoliv integrál existuje třeba na celém $\mathbb{R}$.

Integrace funkcí obsahujících odmocniny (4) Nechť $q \in \mathbb{N}$ a $ad \neq bc$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

používáme substituci

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bude se nám hodit, že $x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$, a tudíž

$$\mathrm{d}x = qt^{q-1}\frac{ad-bc}{(a-ct^q)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Eulerovy substituce (5) Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,\mathrm{d}x$$

používáme následující substituce:
a) Polynom ax^2+bx+c má dvojnásobný kořen α a $a > 0$, pak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$$

a jedná se v podstatě o integraci běžné racionální funkce (řešíme zvlášť pro $x < \alpha$ a $x > \alpha$).
b) Polynom ax^2+bx+c má dva různé reálné kořeny α_1 a α_2. Pak úpravou převedeme na tvar (4) pro odmocninu $\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a\frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}}$.
c) Polynom ax^2+bx+c nemá reálný kořen a tedy $a > 0$. Pak použijeme substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t.$$

Po umocnění na druhou dostaneme $ax^2+bx+c = ax^2+2t\sqrt{a}x+t^2$. Odsud snadno vyjádříme $x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$, tedy i spočteme $\mathrm{d}x = \left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}\right)'\,\mathrm{d}t$.

Poznámka. *Stejně dobře by fungovala substituce* $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$.

Příklad. $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ *řešíme pomocí per-partes (funkce, kterou budeme integrovat je* 1*, kterou si přimyslíme).*
$I_n = \int_0^\pi /2 \sin^n x\,\mathrm{d}x$. *Pomocí per-partes získáme rekurenci, vyjde* $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$ *a* $I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ *Protože se dá snadno ukázat, že* $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$, *získáme odsud* Wallisovu formuli *pro* π:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

Kapitola 6

Určitý integrál

6.1 Riemannův integrál

Nyní se konečně dostaneme k tomu, jak měřit plochu.

Definice. *Konečnou množinu* $\{x_j, j = 0, \dots, n\}$ *nazýváme* dělením *intervalu* $[a, b]$, *jestliže* $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. *Řekneme, že dělení* D' *intervalu* $[a, b]$ je zjemněním *dělení* D *intervalu* $[a, b]$, *jestliže* $D' \supseteq D$.

Poznámka. *Podle definice může být* $D = D'$. *To je trochu divné jazykově, ale přirozenější matematicky.*

Definice. *Nechť* f *je omezená funkce definovaná na intervalu* $[a, b]$ *a* D *je dělení* $[a, b]$. *Definujme* horní a dolní součty

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(x);\ x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$
$$s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{f(x);\ x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$

horní Riemannův integrál

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\Big\{S(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\Big\}$$

a dolní Riemannův integrál

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\Big\{s(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\Big\}.$$

Pokud $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, *pak řekneme, že* f *je Riemannovsky integrovatelná a klademe*

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Množinu funkcí majících Riemannův integrál značíme $R[a, b]$.

K zamyšlení: Najděte (co "nejjednodušší") funkci na $[0, 1]$, která má dolní integrál 0 a horní integrál 1.

L Věta 6.1 (o zjemnění dělení)**.** *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$, D a D' jsou dělení intervalu $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak*

$$s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D).$$

L Věta 6.2 (o dvou děleních)**.** *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak*

$$s(f,D_1) \le S(f,D_2).$$

Definice. *Nechť $D = (x_j)_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Číslo $\nu(D) = \max_{j=1,\dots,n} |x_j - x_{j-1}|$ nazveme* normou dělení *D.*

Příklad. *Spočtěme podle definice Riemannův integrál z $f(x) = x^2$ na $[0,1]$. Zvolíme-li dělení $D_n = (x_j)_{j=0}^n$, je horní součet $S(f,D_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n}(\frac{j}{n})^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3n^3}$. To je o něco víc než $1/3$, a zjevně je $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n) = 1/3$.*
Obdobným součtem (rozmyslete) dostaneme dolní součet $s(f,D_n) = \frac{n(n-1/2)(n-1)}{3n^3}$. Opět je limita $1/3$, tentokrát je to o něco méně.
1) **K zamyšlení:** *Rozmyslete si, zda odsud už plyne, že $(R)\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1/3$. (V definici je supremum, resp. infimum přes všechna dělení – nevadí to?)*
2) **K zamyšlení:** *Rozmyslete si, zda tento postup (zvolíme jednu posloupnost dělení) musí fungovat, nebo zda jsme měli kliku.*
3) Jak vidíme, jde to, ale ne úplně pohodlně. Cílem této definice není ani tak, aby se podle ní přímo počítalo, jako to, abychom měli jasně dáno, jak jde počítat obsah plochy.

T Věta 6.3 (kritérium existence R. integrálu)**.** *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak*

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ dělení } D\ [a,b]:\ S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

L Věta 6.4 (monotonie integrálu)**.** *$f, g \in R[a,b]$, $f \le g$, pak $(R)\int_a^b f \le (R)\int_a^b g$.*

Věta 6.5 (linearita integrálu)**.** *Pokud $f, g \in R[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tak $f+g \in R[a,b]$, $\alpha f \in R[a,b]$ a platí*

$$(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g \quad \text{a} \quad (R)\int_a^b \alpha f = \alpha \cdot (R)\int_a^b f.$$

(Bez důkazu.)

Poznámka. *Riemannův integrál má i další (přirozené) vlastnosti:*

- *Aditivita vzhledem k intervalům: Nechť $a < b < c$. Pokud $f \in R[a,c]$, pak také $f \in R[a,b]$, $f \in R[b,c]$ a platí*

$$(R)\int_a^c f = (R)\int_a^b f + (R)\int_b^c f.$$

- *Hodnota Riemannova integrálu se nezmění, změníme-li funkce v konečně mnoha hodnotách.*
- *Pokud $f \in R[a,b]$, pak také f^+ a f^- patří do $R[a,b]$. Platí $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$.*

L Věta 6.6 (vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť f je (omezená) monotónní funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in R[a,b]$.*

Definice. *Řekneme, že funkce f je* stejnoměrně spojitá *na intervalu I, pokud*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I:\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Fakt. Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

T Věta 6.7 (o vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť f je spojitá na $[a,b]$, pak $f \in R[a,b]$.*

T Věta 6.8 (o derivaci integrálu podle horní meze)**.** *Nechť J je neprázdný interval a $f \in R[\alpha,\beta]$ pro každé $\alpha,\beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod. Definujme na J funkci*

$$F(x) = \begin{cases} (R)\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t & x \geq c\,; \\ -(R)\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t & x \leq c\,. \end{cases}$$

Pak platí

- *F je spojitá na J.*
- *Jestliže je f spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důsledek:
(i) Je-li f spojitá na (a,b), pak má na (a,b) primitivní funkci (Věta 6.9).
(ii) Nechť f je spojitá na intervalu $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$(R)\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\beta_-} F(x) - \lim_{x\to\alpha_+} F(x),$$

kde F je primitivní funkce k f na (α,β).

T Věta 6.9 (o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce)**.** *Nechť I je otevřený interval a f je spojitá funkce na I. Pak f má na I primitivní funkci.*
(Důsledek Vět 6.8 a 6.7.)

Definice. *Řekneme, že funkce f má na intervalu (a,b)* Newtonův integrál*, jestliže má na (a,b) primitivní funkci F a $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ jsou vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo*

$$(N)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

(výraz na pravé straně značíme zkráceně $[F(x)]_a^b$).

L Věta 6.10 (per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a,b]$. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x, .$$

Věta 6.11 (o substituci pro určitý integrál)**.** (i) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je funkce, která má na intervalu $[\alpha,\beta]$ spojitou první derivaci. Pak*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je na a má na $[\alpha,\beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde Φ je primitivní funkce k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.

(Bez důkazu.)

Poznámka. *V předchozí větě není nezbytné, aby φ byla definovaná na celém uzavřeném intervalu $[\alpha, \beta]$. Můžeme také vzít funkci definovanou na (α, β), a meze přepočítat pomocí limit.*

6.2 Aplikace určitého integrálu

Definice. *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá funkce, pak* obsahem plochy *pod grafem funkce f nazveme*

$$\text{Obsah}(f, [a, b]) = (N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice. *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = (x_j)_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$. Označme*

$$L(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}.$$

Délkou křivky *f nazveme*

$$L\big(f([a, b])\big) = \sup\big\{L(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\big\}.$$

T Věta 6.12 (délka křivky)**.** *Nechť f má na intervalu $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak*

$$L\big(f([a, b])\big) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Věta 6.13 (délka křivky v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a má spojitou první derivaci. Pak*

$$L\big(\varphi([a, b])\big) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(x))^2 + (\varphi_2'(x))^2 + \ldots + (\varphi_n'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

(Bez důkazu.)

Věta 6.14 (objem a povrch rotačního tělesa)**.** *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme*

$$T = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ x \in [a, b] \text{ a } \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\big\}.$$

těleso vzniklé rotací grafu funkce $f(x)$ kolem osy x. Pak

$$\text{Objem}(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\text{Obsah povrchu}(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

(Nepočítáme objem dvou kruhových podstav, jen pláště.)

(Bez důkazu.)

L Věta 6.15 (aproximace součtů pomocí integrálů)**.** *Nechť f je nerostoucí na intervalu $[a-1, b]$ (resp. $[a, b+1]$) a nechť je na tomto intervalu (Riemannovsky) integrovatelná. Buď $c_k = f(k)$. Pak*

$$\sum_{k=a}^{b} c_k \le \int_{a-1}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

$$\sum_{k=a}^{b} c_k \ge \int_{a}^{b+1} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.2}$$

(6.3)

Pokud je f neklesající, platí nerovnosti opačné.

Příklad. *Odhadněme $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

Věta 6.16 (integrální kritérium konvergence řad)**.** *Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na intervalu $[n_0-1, \infty)$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost a_n platí $a_n = f(n)$ pro všechna $n \ge n_0$. Pak*

$$(N)\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

(Bez důkazu.)

Příklad. *Pro která a konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$?*

Kapitola 7

Funkce více proměnných

Budeme se zabývat výrazy, ve kterých vystupuje více nezávislých proměnných. Naučíme se mj., jak hledat maxima/minima takových výrazů, a jak je aproximovat pomocí 'tečen' (tak např. spočteme $1.1^{0.98}$). Napřed ale pár pojmů.

Definice. Funkcí n reálných proměnných *rozumíme zobrazení* $f : M \to \mathbb{R}$, *kde* $M \subseteq \mathbb{R}^n$. *Množina* M *se nazývá* definiční obor *funkce* f *a značí* D_f.

Definice. *Buď* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *libovolný bod a* $\delta > 0$. *Pak* δ*-okolím bodu* a *nazveme množinu*

$$U(a, \delta) = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta)$$

a prstencovým δ*-okolím množinu* $P(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$.
Množinu $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *je* otevřená, *pokud*

$$\forall x \in G \ \exists \delta > 0 \ : \quad U(x, \delta) \subseteq G\,.$$

Množina F *se nazývá* uzavřená, *pokud její doplněk, tj.* $\mathbb{R}^n \setminus F$ *je otevřená.*

Příklad. *Pro* $n = 1$ *jsou otevřené intervaly příklady otevřených množin, uzavřené intervaly příklady množin uzavřených.*

K zamyšlení: Kdybychom definovali $U(x, \delta)$ jinak, konkrétně jako množinu bodů, jejichž vzdálenost od x je menší než δ, dostali bychom stejné otevřené množiny.

Definice limity i spojitosti je skoro stejná jako pro funkce jedné proměnné, jenom si teď zavedeme dva pojmy: limita a limita vzhledem k množině.

Definice. *Nechť* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$. *Řekneme, že* f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}^n$ limitu *rovnou* $A \in \mathbb{R}^*$, *jestliže platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a, \delta) \ : \quad f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. *Řekneme, že* f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}^n$ limitu vzhledem k M *rovnou* $A \in \mathbb{R}^*$, *jestliže platí tvrzení výše, v němž místo* $P(a, \delta)$ *píšeme* $P(a, \delta) \cap M$. *Značíme* $\lim\limits_{x \to a; x \in M} f(x) = A$.

Definice. *Nechť* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in M$. *Řekneme, že* f *je v* a spojitá/resp. spojitá vzhledem k M, *jestliže*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(resp. $\lim_{x \to a; x \in M} f(x) = f(a)$*).*

Zřejmě platí aritmetika limit, věta o strážnících i věta o spojitosti složené funkce, a proto je budeme používat na cvičení.

7.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice. *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f : G \to \mathbb{R}$ a $x \in G$.* Parciální derivací funkce f v bodě x podle i-té proměnné *nazveme*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t},$$

pokud limita existuje.

Příklad. *Nechť $f(x, y) = e^x$. Pak $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x$, zatímco $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. (Znáte vtip o derivaci podle y?)*

Definice. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f nabývá v bodě x_0 svého* minima (lokálního minima) vzhledem k M, *pokud*

$$\textit{pro všechna } x \in M \textit{ platí } f(x) \geq f(x_0)$$

$$\big(\textit{existuje } \delta > 0, \textit{ že pro všechna } x \in M \cap P(x_0, \delta) \textit{ platí } f(x) \geq f(x_0)\big).$$

Analogicky definujeme maximum (lokální maximum) *a 'ostré varianty'.*

L Věta 7.1 (nutná podmínka existence extrému funkce více proměnných)**.** *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Má-li f v bodě a lokální minimum (maximum) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Někdy není úplně jasné, zda nalezené "podezřelé body" s nulovými derivacemi jsou skutečně extrémy. Už u funkcí jedné proměnné nám druhá derivace pomohla poznat, zda je bod a, kde $f'(a) = 0$ minimum (pokud $f''(a) > 0$, f je konvexní) nebo maximem (pokud $f''(a) < 0$ a f je konkávní), nebo ani jedno (pokud $f''(a) = 0 \ldots$ pak v a může (ale nemusí!) být inflexní bod (příklad?)). Obdobně zde, jen situace bude maličko složitější. Definice však je přímočará:

Definice. *Druhou parciální derivací funkce f rozumíme parciální derivaci některé parciální derivace f, pokud existují. Pořádně:*
Nechť f má na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$ parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak definujeme pro $a \in G$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$ druhou parciální derivaci*, kterou zapisujeme*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(a) \textit{ pro } i \neq j$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(a)$$

Obdobně definujeme a zapisujeme derivace vyšších řadů.
Pokud $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a f má všechny parciální derivace spojité, říkáme, že f je prvek $C^1(G)$. Obdobně, f je v $C^2(G)$, pokud má spojité všechny druhé parciální derivace, atd.

Věta 7.2 (záměnnost smíšených derivací)**.** *Pokud má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ spojitou parciální derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, pak existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ a je rovna $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.*

(Bez důkazu.)

K zamyšlení: Nalezněte f, pro kterou obě výše zmíněné parciální derivace existují, ale nerovnají se.

Věta 7.3 (postačující podmínky pro lokální extrém). *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a nechť $f \in C^2(G)$. Nechť $df(a) = 0$ (tedy a je bod podezřelý na lokální extrém).*

- *Je-li $D^2 f(a)$ pozitivně definitní, pak a je bod lokálního minima.*
- *Je-li $D^2 f(a)$ negativně definitní, pak a je bod lokálního maxima.*
- *Je-li $D^2 f(a)$ indefinitní, pak v a není extrém.*

Zde $D^2 f(a)$ značí tzv. Hessián *– $n \times n$ matici všech druhých parciálních derivací v bodě a, tj. $D^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$.*

(Bez důkazu.)

Znalosti o definitních maticích jste mohli získat v lineární algebře, zde jen stručně. Napřed definice, buď M matice $n \times n$. Řekneme, že M je

- *pozitivně definitní* pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n \ x^T M x > 0$
- *negativně definitní* pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n \ x^T M x < 0$
- *pozitivně semidefinitní* pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n \ x^T M x \geq 0$
- *negativně semidefinitní* pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n \ x^T M x \leq 0$
- *indefinitní* pokud není ani pozitivně semidefinitní, ani negativně semidefinitní.

Z různých možných kritérií si zmíníme *Sylvestrovo determinantové*: Pro matici M označme M_i matici $i \times i$ obsahující prvních i řádek a prvních i sloupců. Pak M je

- *pozitivně definitní* právě když $\forall i \ \det M_i > 0$;
- *negativně definitní* právě když $\forall i \ \det M_i \cdot (-1)^i > 0$;
- *indefinitní* právě když existují vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ tak, že $x^T M x < 0 < y^T M y$.
- Pro M pozitivně/negativně *semidefinitní* platí první nebo druhý bod s neostrou nerovností, tyto nerovnosti však **nezaručují semidefinitnost**! (Promyslete si třeba matici s diagonálou $0, 1, -1$ a nulami mimo diagonálu!)

Příklad. *Určete lokální extrémy a jejich typy pro funkci $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ definovanou na celém $\mathbb{R}^2$.* **K zamyšlení:** *Jsou tyto extrémy globální?*

Značení: pokud a, b jsou body v $\mathbb{R}^m$, tak symbolem $[a, b]$ značíme *m-rozměrný interval (kvádr)*: součin

$$\prod_{i=1}^{m} [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}] \,.$$

T Věta 7.4 (o přírůstku funkce více proměnných). *Nechť f má vlastní parciální derivace v každém bodě m-rozměrného intervalu $[a, b]$. Pak existují body $c_1, \ldots, c_m \in [a, b]$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)(b_i - a_i) \,.$$

Poznámka. *Kdybychom uměli derivovat složené funkce více proměnných, mohli bychom tuto větu dokázat snáze a jen s použitím jednoho bodu c_i. Použitím m bodů si důkaz umožníme i bez vět, které jsme ještě neměli (a ke kterým naopak tuto větu použijeme).*

L Věta 7.5 (parc.derivace a spojitost)**.** *Buď $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Nechť $f : U(a,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ má omezené všechny parciální derivace. Pak f je spojitá v a.*
(K důkazu stačí použít větu o přírůstku funkce více proměnných.)

L Věta 7.6 (o tvaru totálního diferenciálu)**.** *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a, pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a pro všechna $h \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Definice. *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{R}$, $x \in G$ a $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.* Derivací funkce f v bodě $x \in G$ ve směru v *nazveme*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

pokud limita existuje.

Poznámka. *Zřejmě je $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v$.*

Definice. *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{R}$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je* totální diferenciál funkce f v bodě a*, jestliže*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Značíme $df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ značíme $df(a)(h)$.

L Věta 7.7 (tot.diferenciál a spojitost)**.** *Pokud funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ totální diferenciál, tak je f v a spojitá.*

L Věta 7.8 (Spojitost parc.derivací a tot.diferenciál)**.** *Pokud funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojité všechny parciální derivace, pak f má v a totální diferenciál.*

Definice. *Vektor $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\right)$ se nazývá* gradient funkce f v bodě a*. Předchozí věta říká, že $df(a)(h)$ je skalární součin vektorů h a $\nabla f(a)$.*

Geometrické významy gradientu

- směr největšího přírůstku: rozdíl $f(a+v) - f(a)$ je přibližně roven skalárnímu součinu $\nabla f(a) \cdot v$. Při pevné velikosti v je toto největší (resp. nejmenší), pokud je v kladný (resp. záporný) násobek gradientu $\nabla f(a)$.
- *tečná nadrovina ke grafu f*. Graf funkce f je množina $(x, f(x))$ v $\mathbb{R}^{n+1}$. Její normálový vektor v bodě $(a, f(a))$ je roven $(\nabla f(a), -1)$. Tečná rovina má tedy rovnici
$$x_{n+1} - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)\,.$$

Příklad. *Spočítejme přibližně $1.1^{0.9}$. Označme $f(x,y) = x^y$ a pišme*

$$f(x+dx, y+dy) \doteq f(x,y) + df(x,y)(dx,dy) \tag{7.1}$$
$$= f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \tag{7.2}$$

Tedy konkrétně $f(1+0.1, 1-0.1) \doteq f(1,1) + 1 \cdot 0.1 + 0 \cdot (-0.1) = 1.1$. (Přesná hodnota je $1.0895\ldots$.)

7.2 Vektorové funkce – zobrazení do $\mathbb{R}^m$

Definice. Vektorová funkce více proměnných *je zobrazení* $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Můžeme ji přirozeně chápat jako m-tici normálních funkcí více proměnných, tj.* $f = (f_1, \dots, f_m)$, *a* $f_j : M \to \mathbb{R}$.
Pro zobrazení f *definujeme parciální derivaci* $\frac{\partial f}{\partial x_i} = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i})$.

Pro definici limity funkce f máme dvě přirozené možnosti. Buď můžeme maličko modifikovat definici původní: řekneme, že $\lim_{x \to a} f(x) = y$ pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U(a, \delta) f(x) \in U(y, \varepsilon)$$

Definice vypadá stejně jako pro funkce $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jediný rozdíl je v tom, že bod y je teď z $\mathbb{R}^m$, takže i $U(y, \varepsilon)$ má obecnější význam.
Rozmyslete si, že tato definice je ekvivalentní jinému přístupu, kdy řekneme, že $\lim_{x \to a} f(x) = y$ pokud pro všechna $j = 1, \dots, m$ platí $\lim_{x \to a} f_j(x) = y_j$.
Rozmyslete si, že pokud definujeme parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pomocí nově rozšířeného pojmu limity, tak dostaneme stejnou definici jako výše.

Definice. *Buď* $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *zobrazení, jeho složky budeme značit* $f_1, \dots, f_m$, *proměnnou budeme psát* $x = (x_1, \dots, x_n)$. Totální diferenciál f v bodě a *je lineární zobrazení* $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *takové, že*

$$f(a + x) - f(a) = df(a)(x) + o(\|x\|).$$

Jacobiho matice pro f v bodě a *je*

$$Df(a) = J_f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1\, j=1}^{m \quad n}$$

Poznámka. *Terminologie i značení kolísá.*

Fakt: Matice linárního zobrazení $df(a)$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. To je analogie Věty 7.6 a dá se pomocí ní také snadno dokázat.

Věta 7.9 (o aritmetice totálního diferenciálu)**.** *Nechť* $f, g : G \to \mathbb{R}^k$ *pro otevřenou* $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in G$ *a* $df(a)$, $dg(a)$ *existují. Pak existují i* $d(f+g)(a)$ *a* $d(cf)(a)$ $(c \in \mathbb{R})$. *a platí*

1. $d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$
2. $d(cf)(a) = cd(f)(a)$

(Bez důkazu.)

Věta 7.10 (diferenciál složeného zobrazení)**.** *Nechť* $g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ *a* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^s$ *a* $b = g(a)$. *Pak*

$$df(g(x))\Big|_{x=a} = df(y)\Big|_{y=b} dg(x)\Big|_{x=a}$$

(Jen náznak: pokud nahradíme přírůstek $f(a + x) - f(a)$ hodnotou tot.diferenciálu $df(a)(x)$ (a chybu zanedbáme), tak je to jasné.)

L Věta 7.11 (řetízkové pravidlo)**.**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(f_1(y), \dots, f_n(y)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f_j}{\partial y_i}.$$

Příklad. *Zkuste si zderivovat* $H(x) = x^x$ *jako složené zobrazení pro* $f(u, v) = u^v$ *a* $u(x) = v(x) = x$.

7.3 Taylorův polynom

Pokud chceme hodnotu funkce poblíž známého bodu aproximovat přesněji, než pomocí totálního diferenciálu, musíme použít Taylorův polynom *pro více proměnných vyššího řadu, analogicky k situaci z funkcí* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Pro jeho efektní zápis napřed ale zaveďme šikovné značení pro zacházení s k-ticemi čísel. Buď* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ *(takové* α *budeme nazývat* multiindex*).*

- *pro* $x = (x_1, \dots, x_k)$ *položíme* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$
- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_k!$
- $\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!}$ *(tzv. multinomický koeficient)*
- $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}$

Napišme si napřed v tomto značení multinomickou větu: je-li $x = (x_1, \dots, x_k)$*, platí*

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\alpha \text{ multiindex, } |\alpha| = n} \binom{n}{\alpha} x^\alpha$$

(Na přednášce byly tato a následující věta v opačném pořadí, proto divné číslování.)

T Věta 7.13 (Taylorův polynom pro funkce více proměnných)**.** *Nechť* $U = U(a, \varepsilon)$ *je nějaké okolí bodu* $a \in \mathbb{R}^k$. *Nechť* $f : U \to \mathbb{R}$ *je funkce z* $C^n(U)$. Taylorův polynom funkce $f(x_1, \dots, x_k)$ stupně n *(se středem v a) je*

$$Tf_a^n(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{\alpha \text{ multiindex} \\ |\alpha| = m}} \frac{\partial f(a)}{\partial x_\alpha} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}$$

Pak platí

$$f(x) = Tf_0^n(x) + o(\|x\|^n)$$

(Důkaz jen pro $n = 2$*: poměrně snadno převodem na jednorozměný případ, tj. místo funkce* f *bude zkoumat (pro pevný vektor* v*) funkci* $g(t) = f(a + tv)$*)*

Poznámka. *Pro* $n = 1$ *dostáváme výše zkoumanou aproximaci pomocí totálního diferenciálu. Pro* $n = 2$ *se objeví 'kvadratický výraz'* $(x-a)^T D^2 f(a)(x-a)$ *(zde* $D^2 f(a)$ *je matice* $k \times k$, $(x-a)$ *je k-složkový vektor). Odsud se dá dokázat (s troškou práce) Věta 7.3.*

7.4 Věta o implicitní funkci

Chceme řešit soustavu rovnic tvaru

$$f_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

pro $i = 1, \dots, n$. *Chápejme ji jako rovnici pro* y_j*, jsou-li dána* x_i*. V lineární algebře se (pro lineární funkci* f_i*) ukazuje, že tato soustava* n *rovnic pro* n *neznámých má "obvykle" jednoznačné řešení. To obvykle zde znamená, že matice soustavy nesmí být singulární. Pro nelineární funkce si nyní ukážeme zobecnění. Předem upozorníme, že oproti lineárním soustavám, tady obvykle nebude možné řešení vyjádřit vzorcem. Přesto o nich něco budeme moci říci.*

Věta 7.12 (věta o implicitních funkcích)**.** *Buď $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, $f : U = U((a,b)) \to \mathbb{R}^n$. (Tj. soustava výše má tvar $f(x,y) = 0$.) Nechť $f(a,b) = 0$. (Tj. pro $x = a$ je řešení $y = b$.) Nechť dále $f \in C^k(U)$ (pro nějaké $k \geq 1$) a*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b) \right)_{i,j=1}^{n} \neq 0$$

Pak existují $\delta, \Delta > 0$ taková, že pro $x \in U(a,\delta)$ existuje v $U(b,\Delta)$ právě jedno y, pro něž $f(x,y) = 0$. (Tj. právě jedno řešení soustavy rovnic.) Navíc funkce, která x přiřazuje y (označme ji $y(x)$) je z $C^k(U)$.

Definice. *Pro spojitou funkci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ nazveme množinu tvaru $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$* varieta*. (Obvykle se přidává podmínka $\nabla g \neq 0$, my ji pro jednoduchost vynecháme.)*

Rozmysleme si znovu Větu 7.12. Hovoří o množině

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n} : g(x,y) = 0\}$$

($g : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ spojitá funkce), která je zadaná implicitně*, pomocí vlastnosti, kterou body V mají. Chceme tuto množinu vyjádřit* explicitně*, ve tvaru $\{(x, y(x)) : x \in X\}$ pro vhodnou množinu X a funkci $y(x)$. A věta o implicitní funkci nám říká, kdy je toto možné.*
Rozmysleme si konkrétní příklad. Implicitní popis jednotkové sféry je

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Všimněte si, že pomocí tohoto popisu nemůžeme přímo generovat body v dané množině – to bychom museli napřed vyřešit příslušnou rovnici (což je tady snadné, ale obecně nemusí jít). Druhou možností je popis explicitní*, řekneme, že pro daných $n-1$ souřadnic se poslední souřadnice spočítá pomocí nějakého předpisu – zde*

$$B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)}.$$

Pomocí tohoto zápisu můžeme už body na dané ploše generovat – našli jsme tedy i nějaky souřadnicový systém popisující příslušnou plochu (konkrétně $(x_1, \ldots, x_{n-1})$), poslední souřadnici můžeme dopočítat). Z tohoto hlediska je explicitní popis šikovnější, ale všimněte si "drobných rozdílů": určitě není pravda $A = B$, vynechali jsme úplně body s $x_n < 0$. Také pro body kde je $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1$ je nešikovné, že libovolně blízko najdeme body, pro které už x_n nelze dopočítat, pod odmocninou máme záporné číslo. Oproti tomu pokud je $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < 1$, tak můžeme dopočítat vhodné x_n i pro "všechny body okolo", neboli v takovýchto bodech se B jeví jako kus $n-1$-rozměrného Eukleidovského prostoru.
Zejména ale není jasné, jestli takto můžeme postupovat obecně, ne každá rovnice jde tak snadno vyřešit jako ta v předpisu množiny A, některé nejdou vyřešit vůbec (řešení nelze napsat "vzorečkem").
Věta 7.12 popisuje, že explicitní popis vždy existuje (pokud situace není v jistém smyslu degenerovaná, jako v popsaném příkladě body s $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1$). Tento explicitní popis nelze vždy vyjádřit konkrétním vzorcem (rovnici neumíme vyřešit), zato můžeme jednoduše najít parciální derivace tohoto explicitního vyjádření, což je často užitečné.

Věta 7.14 (derivace implicitní funkce)**.** *V situaci Věty 7.12 je*

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}$$

ve všech bodech $x \in U(a, \delta)$.
(Bez důkazu.)

Připomeňme, že symbolem $\frac{\partial f}{\partial x}$ rozumíme matici totálního diferenciálu, tj. matici $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$.
Následující věta zobecňuje větu ze zimního semestru: tehdy jsme počítali derivaci inverzní funkce jako převrácenou hodnotu derivaci, nyní spočteme všechny derivace inverzního zobrazení (je jich už celá matice) jako inverzní matici. Tentokrát je ale podstatnou součástí věty i část existenční, nenulovost determinantu matice derivací zaručí existenci inverzního zobrazení. (Obdoba platí i pro funkce jedné proměnné, ale tam jsme ji obvykle nepotřebovali.)
(Na přednášce byla tato věta rozdělena na dvě, s čísly 7.15 a 7.16.)

Věta 7.15 (o inverzním zobrazení)**.** *Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : G \to \mathbb{R}^n$ zobrazení z $C^1(G)$, $a \in G$, $f(a) = b$. Pišme $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ a $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Uvažme dále matici jednotlivých parciálních derivací*

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}.$$

Pokud matice J je regulární (tj. $\det J \neq 0$), pak existuje inverzní zobrazení f^{-1} definované na nějakém otevřeném okolí bodu b. Navíc, toto inverzní zobrazení má v b všechny parciální derivace, které jsou dány maticí J^{-1}.

(Jen idea: můžeme využít větu o implicitní funkci, položíme $g(x, y) = f(y) - x$. Pak zobrazení $y(x)$ splňuje $g(x, y(x)) = 0$ právě tehdy, když $f(y(x)) = x$, neboli když y je inverzní zobrazení k f. Nebo bychom mohli tuto větu dokázat přímo a větu o implicitní funkci z ní odvodit.)

7.5 Vázané extrémy

Napřed si řekněme, prozatím bez důkazu, větu, která zobecňuje to, co dobře známe z funkcí jedné proměnné: spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima a minima. (Tato věta by se hodila už dříve, při rozhodování o tom, zda nalezené lokální extrémy podle Vět 7.1 a 7.3 jsou globální.) (Na přednášce měla následující věta číslo 7.18.)

Věta 7.16 (Existence extrému na omez. uzavř. množ. v $\mathbb{R}^n$)**.** *Buď $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ spojité zobrazení. Označme $F = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq 0\}$. Nechť je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená množina (tj. nechť existuje konstanta C tak, že všechny body F mají od počátku souřadnic vzdálenost maximálně C). Nechť $f : F \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak f nabývá na F maxima i minima.*
(Bez důkazu.)

Poznámka. *Věta platí obecněji pro uzavřené a omezené množiny v $\mathbb{R}^n$, v té podobě si ji dokážeme obecněji v metrických prostorech, pomocí tzv. kompaktnosti. Ve většině případů ale můžeme uzavřenost prokázat tak, že množinu napíšeme ve tvaru $\{x : g(x) \geq 0\}$ – příp. $\{x : g(x) = 0\}$. Verze s rovností se ale z verze s nerovností snadno dokáže (rozmyslete si!).*

Příklad. *Zkoumejme funkci* $f(x,y) = xy^2e^x$ *jednotkovém kruhu, tj. na množině* $B(\vec{0},1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$*. Jedná se o spojitou funkci na uzavřené omezené množině, tudíž nabývá extrémů. Jak je ale najít? Pro funkci jedné proměnné jsme zvlášť prozkoumali koncové body a zvlášť otevřený interval (tak, že jsme hledali body, kde je derivace rovna nule).*
Zde budeme postupovat obdobně. Extrémy f *na* B *mohou být nabyty buď 'uvnitř' (v tomto případě je asi jasné, co se tím myslí, přesná definice obecněji v metrických prostorech), nebo na hranici. Pro první případ máme Věty 7.1 a 7.3.*
Pro body na hranici bychom mohli v tomto případě zkoušet dosazovat $y(x) = \sqrt{1-x^2}$*, poprat se s tím, že musíme uvažovat i* $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$ *a že bod* $(x,y) = (1,0)$ *je speciální a vyšlo by to. Elegantnější postup dává následující věta (po jejímž vyslovení příklad dopočítáme).*

T Věta 7.17 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)**.** *Nechť* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina,* $s < n, f, g_1, \ldots, g_s \in C^1(G)$ *a mějme množinu*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = \ldots = g_s(x) = 0\}.$$

Je-li $a \in M$ *bodem lokálního extrému* f *vzhledem k* M *a vektory* $\nabla g_1(a), \ldots, \nabla g_s(a)$ *jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *tak, že platí následující rovnost pro vektory*

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \ldots + \lambda_s \nabla g_s(a)\,.$$

Poznámka. *Věta nám říká, že pokud extrém existuje, tak ho umíme najít z nějaké rovnice. Věta ale nezaručuje existenci extrému (k tomu musíme použít Větu 7.16) ani neříká, že bod z rovnice nalezený je extrém (existuje varianta Věty 7.3, ale je trochu technická)!*

Poznámka. *Kdo někdy zkoumal v mapě, kde je nejvyšší bod na nějaké cestě, tak zná speciální případ: v nejvyšším bodu buď procházíme vrcholem (lokálním maximem) nebo se vracíme před vrcholem. V prvním případě je gradient nadmořské výšky* ∇f *je nulový. Ve druhém případě je cesta tečná na vrstevnici. Pokud je cesta určená rovnicí* $g = 0$*, tak jsou vrstevnice* f *a* g *tečné právě když* ∇f *a* ∇g *jsou rovnoběžné.*

K zamyšlení: *Kdyby se ve větě vynechal předpoklad o lineární nezávislosti vektorů* $\nabla g_i(a)$ *pro* $i = 1, \ldots, s$*, tak by přestala platit. Proč? (Nakreslete obrázek – to je asi rozumější – nebo najděte protipříklad, kde funkci* f *a funkce* g_i *zadáte pomocí vzorců.)*

Kapitola 8

Metrické prostory

Motivace: *Máme-li dva body v rovině, jsou nejméně tři přirozené způsoby přiřazení vzdálenosti. Můžeme zkoumat eukleidovskou ("normální") vzdálenost, součtovou vzdálenost (užitečnou při cestování městem s pravoúhlou sítí silnic), nebo maximovou vzdálenost (užitečná při pohybu šachového krále). Bude se tedy hodit, prozkoumat pojem vzdálenosti ve větší obecnosti.*

8.1 Základní pojmy

Definice. Metrickým prostorem *budeme rozumět dvojici* (P, d)*, kde* P *je množina bodů a* $d : P \times P \to \mathbb{R}$ *splňuje*

1. $\forall x, y \in P: \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\forall x, y \in P: \ d(x, y) = d(y, x)$ *(symetrie),*
3. $\forall x, y, z \in P: \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost).*

Funkci d *nazýváme* metrika.

Příklad. *1) Euklidovská metrika na* $\mathbb{R}^n$*. Pro* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *definujeme* $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.
2) Maximová metrika na $\mathbb{R}^n$*. Definujeme* $d_\infty(x, y) = \max_{i=1\ldots n} |x_i - y_i|$.
3) Součtová metrika na $\mathbb{R}^n$*. Definujeme* $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
4) Diskrétní metrika na libovolné množině P *je definována jako* $d(x, x) = 0$ *pro všechna* $x \in P$ *a* $d(x, y) = 1$ *pro všechna* $x \neq y$.
5) Supremová metrika na $C([0, 1])$ *je definována* $d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.
6) Metrika na $L^2([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$ *je definována* $d(f, g) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx}$.

K zamyšlení: *Rozmyslete si, že výše uvedené vzorce skutečně určují metriku.*

Definice. *Nechť* (P, d) *je metrický prostor,* $x \in P$*,* $r > 0$*.* Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r *nazveme množinu*

$$B(x, r) := \{y \in P : \ d(x, y) < r\}.$$

Uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r *nazveme množinu*

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in P : \ d(x, y) \leq r\}.$$

Definice. *Nechť (P, d) je metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subseteq P$ je* otevřená (v (P, d))*, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r > 0$, že $B(x, r) \subseteq G$. Řekneme, že množina $F \subseteq P$ je* uzavřená (v (P, d))*, pokud je $P \setminus F$ otevřená.*

Příklad. *Otevřený interval je otevřená množina v $(\mathbb{R}, d_1)$. Uzavřený interval je uzavřená množina v $(\mathbb{R}, d_1)$.*

L Věta 8.1 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť (P, d) je metrický prostor. Pak*

1. *$\emptyset$ a P jsou otevřené množiny.*
2. *Jsou-li $G_1, \dots, G_n$ otevřené, pak $\bigcap_{i=1}^n G_i$ je otevřená.*
3. *Jsou-li $G_\alpha,\ \alpha \in A$ otevřené, pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená.*

K zamyšlení: *Ve třetí části je A libovolně velká množina. Oproti tomu druhá část neplatí pro nekonečné průniky. Proč?*

L Věta 8.2 (vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pak*

1. *$\emptyset$ a P jsou uzavřené množiny.*
2. *Jsou-li $F_1, \dots, F_n$ uzavřené, pak $\bigcup_{i=1}^n F_i$ je uzavřená.*
3. *Jsou-li $F_\alpha,\ \alpha \in A$ uzavřené, pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená.*

Definice. *Nechť (P, ρ) a (P, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že* metriky ρ a σ jsou ekvivalentní *pokud existují konstanty $c_1, c_2 > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in P$ platí*

$$c_1 \rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq c_2 \rho(x, y)\,.$$

K zamyšlení: *Výše definovaná ekvivalence metrik je opravdu relace ekvivalence (tj. symetrická, reflexivní a tranzitivní).* **K zamyšlení:** *Ekvivalentní metriky ... mají stejné otevřené a uzavřené množiny.*

Definice. *Nechť V je vektorový prostor. (Tak jako v lineární algebře) nazveme* norma *zobrazení $V \to \mathbb{R}$, jehož hodnotu pro $x \in V$ značíme obvykle $\|x\|$ a které splňuje následující požadavky:*

1. *$\|cx\| = c\|x\|$ pro všechna $c \geq 0$,*
2. *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,*
3. *$\|x\| \geq 0$, přičemž $\|x\| = 0$ jen pokud je $x = \vec{0}$.*

Důvod proč zde připomínáme definici z lineární algebry je ten, že z vektorového prostoru s normou můžeme vyrobit metrický prostor, se stejnou množinou bodů-vektorů a s metrikou danou předpisem $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. **K zamyšlení:** *Toto je opravdu metrika.*

8.2 Konvergence v metrických prostorech

Definice. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $(x_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že $(x_n)_{n=1}^\infty$* konverguje k x (v (P, ρ))*, pokud $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nebo $x_n \xrightarrow{\rho} x$.*

Poznámka. *Ekvivalentní s výše uvedenou definicí* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *je následující geometricky názorný zápis*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; : \; x_n \in B(x, \varepsilon)\,.$$

L Věta 8.3 (konvergence a metrika)**.** *Buďte* (x_n), (y_n) *posloupnosti v metrickém prostoru* (P, d)*. Nechť* (x_n) *konverguje k* x*,* (y_n) *k* y*. Pak* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$*. Speciálně: každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

T Věta 8.4 (charakterizace uzavřených množin)**.** *Nechť* (P, d) *je metrický prostor a* $F \subseteq P$*. Pak*

$$F \text{ je uzavřená } \Leftrightarrow \big(x_n \xrightarrow{d} x \text{ a } x_n \in F \Rightarrow x \in F\big).$$

Definice. *Buď* (X, d) *metrický prostor,* $A \subseteq X$*. Definujeme*

- vnitřek A: $intA = \cup\{G \subseteq A : G \text{ otevřená}\}$.
- uzávěr A: $\overline{A} = \cap\{F \supseteq A : F \text{ uzavřená}\}$.
- hranici A: $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

Věta 8.5.

- *$intA$ je otevřená množina, $\overline{A}$ a ∂A množiny uzavřené.*
- $intA = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$
- $\overline{A} = X \setminus int(X \setminus A)$
- $\partial A = \overline{A} \setminus intA$

(Bez důkazu.)

8.3 Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory

Definice. *Nechť* (P, ρ) *a* (Q, σ) *jsou metrické prostory. Nechť* P*,* $f : P \to Q$ *a* $x_0 \in P$*.*
Řekneme, že f *je* spojitá v bodě x_0*, jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in B_\rho(x_0, \delta) : \; f(x) \in B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Řekneme, že f *je* spojitá na P*, jestliže je spojitá v každém bodě* P*.*

L Věta 8.6 (spojitost a konvergence)**.** *Nechť* (P, ρ) *a* (Q, σ) *jsou metrické prostory a* $f : P \to Q$ *spojité v* x*. Nechť* (x_n) *je posloupnost konvergující k* x*. Pak* $f(x_n)$ *konverguje k* $f(x)$*.*

Věta 8.7 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť* f *je zobrazení z* (X, d) *do* (Y, ρ)*. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- *f je spojitá na X*
- *Pro každou otevřenou $G \subseteq Y$ je $f^{-1}(G)$ otevřená.*
- *Pro každou uzavřenou $F \subseteq Y$ je $f^{-1}(F)$ uzavřená.*

(Důkaz byl jen části – nezkouší se.)

Definice. *Buď* X *množina a* $\mathcal{G}$ *podmnožina* $\mathcal{P}(X)$*. Řekneme, že* $(X, \mathcal{G})$ *je* topologický prostor *pokud*

- $\emptyset, X \in \mathcal{G}$
- $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G} \implies G_1 \cap \cdots \cap G_n \in \mathcal{G}$
- $(\forall a \in A) G_a \in \mathcal{G} \implies \cup_{a \in A} G_a \in \mathcal{G}$

Speciálně tedy dostaneme topologický prostor, pokud $\mathcal{G}$ budou všechny otevřené množiny v metrickém prostoru (X, d) pro libovolnou metriku d (Věta 8.1).
O konvergenci, spojitosti, atd. můžeme rozhodnout i bez znalosti metrik, jen se znalostí toho, které množiny jsou otevřené.

Příklad. *Buď $f(x, y) = x^2 + y^2$. Toto je spojitá (***K zamyšlení:** *proč?) funkce $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zvolme uzavřené množiny $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$ takto: $F_1 = \{1\}$, $F_2 = (-\infty, 1]$. Dle Věty 8.7 jsou uzavřené i jejich vzory, tedy množiny*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

8.4 Podprostor metrického prostoru

Definice. *Buď (X, d) metrický prostor, $A \subseteq X$ jeho neprázdná podmnožina. Symbolem $d|_{A \times A}$ rozumíme restrikci d na $A \times A$. Metrický prostor $(A, d|_{A \times A})$ nazýváme* podprostor prostoru *(X, d).*

Věta 8.8 (otevřené množiny v podprostoru)**.** *Buď (X, d) metrický prostor a $(A, d|_{A \times A})$ jeho podprostor. Množina $G \subseteq A$ je otevřená v $(A, d|_{A \times A})$, právě tehdy, když existuje (U, d) otevřená v (X, d) taková, že $G = U \cap A$.*
(Bez důkazu.)

Věta 8.9 (spojitost na podprostoru)**.** *Buď (X, d) metrický prostor a $(A, d|_{A \times A})$ jeho podprostor. Buď (Y, ϱ) další metrický prostor. Pokud $f : (X, d) \to (Y, \varrho)$ je spojité zobrazení, tak je spojitá i restrikce $f|_A$.*
(Bez důkazu.)

8.5 Kompaktní metrické prostory

Definice. *Nechť (X, d) je metrický prostor. Řekneme, že X je* kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků X lze vybrat konvergentní podposloupnost. Řekneme, že množina $A \subseteq X$ je* kompaktní*, jestliže je prostor $(A, d|_{A \times A})$ kompaktní.*

Poznámka. *Množina A je kompaktní, pokud z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat poslupnost, která konverguje k bodu v A.*

Příklad. *$[a, b]$ je kompaktní množina (Bolzano-Weierstrassova věta).*
Diskrétní metrický prostor je kompaktní, právě když je konečný.

T Věta 8.10 (vlastnosti kompaktních množin)**.** *Nechť (X, d) je metrický prostor a $A \subseteq X$ je kompaktní. Pak platí*

- *A je uzavřená,*
- *A je omezená (tedy $\exists x \in X,\ r > 0$, že $A \subseteq B(x, r)$).*

L Věta 8.11. *Nechť metrický prostor (X, d) je kompaktní, $A \subseteq X$ je uzavřená. Pak je A také kompaktní.*

Věta 8.12 (kompaktnost kvádru)**.** *Množina* $\prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i]$ *je kompaktní podmnožina* $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$.

(jenom náznak)

T Věta 8.13 (charakterizace kompaktních množin $\mathbb{R}^n$)**.** *Množina* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Věta 8.14 (nabývání extrémů na kompaktu)**.** *Nechť* (X, d) *je metrický prostor a* $K \subseteq X$ *je kompaktní. Nechť* $f : K \to \mathbb{R}$ *je spojitá. Pak* f *nabývá na* K *svého maxima i minima. Speciálně je tedy* f *na* K *omezená.*

(Bez důkazu.)

Poznámka. *Tuto větu známe už ze zimního semestru, kde ovšem* X *bylo* $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x-y|$ *a* K *uzavřený interval. Jak jsme už viděli v minulé kapitole, tato věta je klíčová pro vyšetřování globálních extrémů spojitých funkcí: Pomocí této věty zjistíme, že nějaký extrém existuje: globální, a tedy i lokální. A pak využijeme vět pro hledání lokálních extrémů (*$\nabla f = 0$ *nebo Lagr. multiplikátory).*

Poznámka. *Pro kompaktní množiny platí i další překvapivé věty: např. na kompaktní množině je každý spojitá funkce stejnoměrně spojitá. (To jsme nedokázali, ale využili při zkoumání Riemannova integrálu ze spojité funkce.) Obecně se dá říci, že kompaktní množiny jsou ty, které se "chovají hezky" nebo také "skorokonečně".*