Kombinatorické etudy 10 – ZS 2012/2013

1. (1.28) Máme zase n korun a každý den si něco koupíme. Za i korun je možno koupit a_i druhů zboží ($i = 1, \dots, k$). Označme C_n počet způsobů, jak lze nákupy uspořádat. Předpokládejme, že polynom $x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k = 0$ má různé kořeny $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$.

(a) Dokažte, že

$$C_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \vartheta_1 & \dots & \vartheta_1^{k-2} & \vartheta_1^{k-1+n} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \vartheta_k & \dots & \vartheta_k^{k-2} & \vartheta_k^{k-1+n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \vartheta_1 & \dots & \vartheta_1^{k-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \vartheta_k & \dots & \vartheta_k^{k-1} \end{vmatrix}}$$

(b) Určete vytvořující funkci pro C_n a odsud vzorec pro C_n.

2. (4.13) (a) Kolik je “binárních pěstovaných stromů”, tj. stromů s $2n$ vrcholy, nakreslených v rovině, kde každý vrchol má stupeň 1 nebo 3, a jeden z listů je vyznačen jako kořen? Dva takové stromy jsou stejné, pokud mezi nimi existuje isomorfismus, který zachovává kořen a cyklické pořadí hran vycházejících z každého vrcholu.

(b) Kolik je pěstovaných stromů s n vrcholy a kořenem v jednom listu?

3. (7.7) Pro bipartitní graf s partitami A, B, jsou následující tvrzení ekvivalentní.

1. G je souvislý a každá jeho hrana je obsažena v perfektním párování.
2. G není $\bar{K}_2$ a pro každé $x \in A$, $y \in B$ má $G - x - y$ perfektní párování.
3. G není $\bar{K}_2$, $|A||B|$ a pro každé neprázdné $X \subsetneq A$ platí $|N_G(X)| > |X|$.

(Takový graf se nazývá elementární bipartitní graf.)

4. (8.14) Každý graf je indukovaný podgraf nějakého α-kritického grafu.

5. (13.37* – poslední šance) Matici nazveme *totálně unimodulární*, pokud každá čtvercová podmatice má determinant 0 nebo ± 1. Matice incidence hypergrafu je definována jako u grafu: na pozici (i, j) je 1 pokud je i-tý vrchol v j-té hraně, a jinak je tam 0.

Ukažte, že hypergraf H má totálně unimodulární matici incidence, právě tehdy když každý podhypergraf H_W má dvojobarvení, ve kterém je každá hrana skoro rozpůlena: Pokud označíme množiny vrcholů s barvou i jako A_i ($i = 0, 1$), tak pro každou hranu $e \in E(H)$ platí $\lfloor |e|/2 \rfloor \le |e \cap A_1| \le \lceil |e|/2 \rceil$.

6. (13.38) (a) Pokud každá kružnice v hypergrafu H má sudou délku, tak lze vrcholy H obarvit dvěma barvami tak, že počet červených a modrých vrcholů se v každé hraně liší maximálně o 1.

(b) Matice incidence H je totálně unimodulární.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`