Kombinatorické etudy 1 – LS 2012/2013

1. (1.6) Stirlingova čísla jsou trochu podobná číslům binomickým, pojďme je prozkoumat!

Stirlingovo rozkladové číslo $\left\{{n \atop k}\right\}$ (též $S(n,k)$, Stirlingovo číslo druhého druhu) značí počet rozkladů množiny $\{1,\ldots,n\}$ na k neprázdných množin; jinak řečeno, je to počet ekvivalencí na n-prvkové množině s k třídami ekvivalence.

Stirlingovo permutační číslo $\left[{n \atop k}\right]$ značí počet permutací množiny $\{1,\ldots,n\}$ s právě k cykly. (Jako Stirlingovo číslo prvního druhu se označuje $s(n,k) = (-1)^{n-k}\left[{n \atop k}\right]$.)

(a) Najděte rekurentní relaci pro $\left\{{n \atop k}\right\}$ i pro $\left[{n \atop k}\right]$, a sestavte jejich tabulku pro $n \le 6$.

(b) Dokažte, že $\left\{{n \atop n-k}\right\}$ i $\left[{n \atop n-k}\right]$ jsou pro pevné k polynomy v n.

(c) Ukažte, že rekurence z části (a) definuje jednoznačně Stirlingova čísla pro všechna *celá* n, k, zadáme-li počáteční podmínky $\left[{0 \atop 0}\right] = \left[{0 \atop 0}\right] = 1$ a $\left\{{0 \atop m}\right\} = \left[{m \atop 0}\right] = 0$ (pro $m \neq 0$).

(d) Dokažte vztah

$$\left\{{n \atop k}\right\} = \left[{-k \atop -n}\right].$$

2. (3.3) Zvolíme náhodnou permutaci čísel $1, 2, \ldots, n$ (tak, že všechny permutace mají stejnou pravděpodobnost zvolení). Jaká je pravděpodobnost, že cyklus obsahující 1 má délku k?

3. (5.4) Každé hraně orientovaného grafu G přiřadíme hodnotu $v(e)$ – můžeme si ji představit jako práci potřebnou k přesunu proti směru hrany e. Chceme najít 'potenciál' – funkci $p(x)$ definovanou pro $x \in V(G)$ takovou, že kdykoli je $e = (x,y)$ tak $v(e) = p(y) - p(x)$. Ukažte, že to je možné právě když pro každý cyklus je celková práce podél cyklu rovna 0.

4. (6.2) (a) Buďte G_1, G_2 grafy se stejnou množinou vrcholů. Ukažte, že platí

$$c(G_1) + c(G_2) \le c(G_1 \cup G_2) + c(G_1 \cap G_2)$$

($c(G)$ označuje počet komponent grafu G).

(b) Předpoklad o stejné množině vrcholů lze vynechat.

5. (11.1) Vlastní číslo a vektor grafu G znamená vlastní číslo a vektor matice sousednosti A_G. Některé vlastnosti grafu lze z vyčíst z jeho vlastních čísel, začneme ale opatrně:

Určete vlastní čísla a vlastní vektory úplného grafu K_n, hvězdy S_n, úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$ a cyklu C_n.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`