Kombinatorické etudy 8 – ZS 2011/2012

1. (4.3) Označme

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_T \prod_i x_i^{\deg_T(v_i)-1},$$

kde sčítání probíhá přes všechny stromy T s danou množinou vrcholů. Odvoďte (bez použití předchozích částí), že $p_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^{n-2}$. Z toho odvoďte Cayleyho formuli pro počet stromů na n vrcholech.

→ Ukázali jsme si, že rovnost platí, když je jedna z proměnných rovna nule. Jeden ze způsobů, jak odsud ukázat, že se rovnají všude, je naznačen v nápovědě. Nicméně, zkuste popřemýšlet i o jiných, obecně: co lze říci o nulových bodech polynomu více proměnných!

(4.4) Mějme vrcholy $\{v_1, \dots, v_n\}$ pokryty vrcholově disjunktními stromy $T_1, \dots, T_r$. Kolik je stromů na daných n vrcholech, které obsahují podstromy $T_1, \dots T_r$?

2. (6.35)
Buď G 2-souvislý graf. Pak následující tvrzení jsou evivalentní:

- G je kriticky 2-souvislý (po odebrání libovolné hrany už 2-souvislý není).
- Žádná kružnice v G nemá tětivu.

3. (9.22) Každý barevnostně kritický graf je 2-souvislý. Které nejsou 3-souvislé?

4. (11.37) (Popis toho, jak fungují náhodné procházky po grafech – viz dříve.)
Označme $\nu_t(x)$ počet výskytů x mezi vrcholy náhodné procházky $v_0, v_1, \dots, v_{t-1}$ (po souvislém grafu). Ukažte, že
(a) $\lim_{t\to\infty} E[\nu_t(x)/t] = \frac{\deg(x)}{2m}$
(b) $\lim_{t\to\infty} Var[\nu_t(x)/t] = 0$.

→ Ukázali jsme si (a) pro nebipartitní grafy. Jak to je pro bipartitní? Stačilo by, kdybychom i tady věděli, že distribuce konverguje ke stacionární – teda ona nekonverguje, ale mohly by zvlášť sudé a zvlášť liché členy.

(11.38)
(a) Střední doba návratu z u zpět do u je $\frac{2m}{\deg u}$.
(b) Střední počet kroků, než se náhodná procházka z u vrátí zpět do u jednou konkrétní hranou je $2m$.

5. (14.26) (a) Necht $f : \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\} \to \mathbb{Z}$ je funkce splňující $1 \le f(i) \le i$ pro každé i. Dokažte, že existuje n čísel $1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_n \le 2^{n-1}$ pro něž

$$f(a_1) \le \dots \le f(a_n).$$

(b) Část (a) neplatí, pokud se konstanta 2^{n-1} sníží o 1.

6. Každá z $n \ge 4$ drben zná jeden drb, který nikdo jiný nezná. Mluví spolu jen po telefonu a při každém hovoru si navzájem sdělí všechny drby, které znají. Ukažte, že je potřeba alespoň $2n - 4$ hovorů, než všechny vědí všechno.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`