

Kombinatorické etudy 1 – ZS 2011/2012

1. (3.3) Zvolíme náhodnou permutaci čísel $1, 2, \dots, n$ (tak, že všechny permutace mají stejnou pravděpodobnost zvolení). Jaká je pravděpodobnost, že cyklus obsahující 1 má délku k ?

2. (6.27) Nazvěme dvě hrany hranově 2-souvislého grafu *ekvivalentní* pokud jsou stejné, nebo jejich odstranění učiní graf nesouvislým. Ukažte, že:

- (a) Jedná se o relaci ekvivalence.
- (b) Všechny hrany jedné ekvivalenční třídy leží na cyklu (který však může obsahovat i další hrany).
- (c) Po odstranění všech hran jedné ekvivalenční třídy P nám zbydou 2-souvislé komponenty.
- (d) Po kontrakci všech komponent $G - P$ získáme kružnici.

3. (9.17) Graf nazveme *kriticky k -barevný*, pokud jeho vrcholy lze dobře obarvit k barvami ale ne $k - 1$ barvami a zároveň po odebrání libovolného vrcholu lze zbylé vrcholy obarvit $k - 1$ barvami.

- (a) Které grafy jsou kriticky 3-barevné?
- (b) Zkonstruuje kriticky 4-barevný graf se $4n$ vrcholy a alespoň n^2 hranami.
- (c) Zkonstruuje kriticky 6-barevný graf s $2n$ vrcholy a minimálním stupněm alespoň n .

4. (11.34) Pro tuto úlohu i úlohy navazující: G je souvislý graf s n vrcholy a m hranami, (v_0, \dots, v_k, \dots) je náhodná procházka pro G : náhodná volba nekonečné posloupnosti vrcholů grafu, přičemž platí, že v_{k+1} je některý ze sousedů v_k , a všichni sousedé mají stejnou pravděpodobnost. *Distribucí* vrcholu v_k rozumíme soubor čísel $(p_k^u)_{u \in V(G)}$, která pro každý vrchol u grafu G udávají pravděpodobnost, že $v_k = u$.

Vyjádřete distribuci v_k pomocí distribuce v_0 , stupňů grafu a jeho matice sousednosti.

5. (14.7) Obarvíme každý z bodů v rovině jednou ze tří barev. Ukažte, že budou existovat dva body se stejnou barvou ve vzdálenosti 1.

6. Ukažte, že vrcholy libovolného grafu lze obarvit červeně a modře tak, že nejvýše polovina hran má oba konce stejné barvy. Dále ukažte, že existuje obarvení, kde nejvýše třetina hran má oba konce červené a **současně** nejvýše třetina hran má oba konce modré. (Pokud se vám nedaří dokázat polovinu/třetinu, zkuste slabší výsledek. Jsou polovina, resp. třetina nejlepší možné?)

Nápověda na: <http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/>