Kombinatorické etudy 4 – LS 2011/2012

1. (4.6 – zbývá odvodit rekurentní formuli) Označme T_n počet stromů s vrcholy $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že platí

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k} \,.$$

Odvoďte odsud Cayleyho formuli ($T_n = n^{n-2}$).

(1.44 – hodí se k tomu odvození)

Dokažte tzv. Abelovy identity

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k} = (x+y+n)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y+n)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}$$

2. Buď G hranově k-souvislý graf, přičemž k je liché. Dokažte, že existuje strom T a zobrazení $f : V(G) \to V(T)$ tak, že dvojice (T, f) popisuje všechny hranové k-řezy v grafu G následujícím způsobem.

Pro hranu e v T označíme V_1, V_2 množiny vrcholů komponent $T - e$, a označíme $C(e)$ množinu hran G mezi $f^{-1}(V_1)$ a $f^{-1}(V_2)$. Pak platí

- pro všechny e je $|C(e)| = k$ (každé $C(e)$ je k-řez) a
- dostaneme takto všechny k-řezy.

3. (10.13) Necht G je r-regulární graf s obvodem alespoň g a nejmenším možným počtem vrcholů. Pak platí

- Průměr G je nanejvýš g.
- Obvod G je roven g. (Obvod je délka nejkratší kružnice.)
- $|V(G)| \leq \frac{r}{r-2}(r-1)^g$

4. (11.41) Pravděpodobnost, že náhodná procházka z u navštíví v před návratem do u je rovna $\frac{2m}{\deg(u)\kappa(u,v)}$. ($\kappa(u, v)$ značí střední dobu návratu mezi u a v: tj. střední dobu trvání náhodné procházky, která vyjde z u, projde v a vrátí se zpět do u).

5. (14.29) V rovině je dáno $N = k^n + 1$ bodů. Ukažte, že můžeme nalézt "skoro rovnou" lomenou čáru s k úsečkami, tj. body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ takové, že každý úhel $a_{i-1}a_ia_{i+1}$ má velikost alespoň $(1 - \frac{1}{n})\pi$.

6. Každá z $n \geq 4$ drben zná jeden drb, který nikdo jiný nezná. Mluví spolu jen po telefonu a při každém hovoru si navzájem sdělí všechny drby, které znají. Ukažte, že je potřeba alespoň $2n - 4$ hovorů, než všechny vědí všechno.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`