Kombinatorické etudy 2 – LS 2011/2012

1. (4.6) Označme T_n počet stromů s vrcholy $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že platí

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k}\,.$$

Odvoďte odsud Cayleyho formuli ($T_n = n^{n-2}$).

2. Buď G hranově k-souvislý graf, přičemž k je liché. Buďte $X, Y \subseteq V(G)$, přičemž $\delta(X) = \delta(Y) = k$. Ukažte, že jeden ze čtyř atomů Vennova diagramu pro X a Y (tj. jedna z množin $X \cap Y$, $X - Y$, $Y - X$, $V(G) - X - Y$) je prázdný. Stručně: minimální liché řezy se nekříží.

3. (10.11) Nechť G je r-regulární graf s obvodem g. Pak platí

- $|V(G)| \geq 1 + r + r(r-1) + \cdots + r(r-1)^{\frac{g-3}{2}}$ pokud je g liché, a
- $|V(G)| \geq 2(1 + (r-1) + \cdots + (r-1)^{\frac{g-2}{2}}$ pokud je g sudé.

4. (11.38) Minule jsme vyřešili (a), chybí ještě (b) a případně hezčí řešení (a).

(a) Střední doba návratu z u zpět do u je $\frac{2m}{\deg u}$.

(b) Střední počet kroků, než se náhodná procházka z u vrátí zpět do u jednou konkrétní hranou je $2m$.

(11.39) Najděte střední hodnotu času, za který se dostaneme z vrcholu u do vrcholu v, pokud

- u, v jsou dva různé vrcholy K_n
- u, v jsou koncové vrcholy P_n (cesty délky n)

5. (14.29) V rovině je dáno $N = k^n + 1$ bodů. Ukažte, že můžeme nalézt “skoro rovnou” lomenou čáru s k úsečkami, tj. body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ takové, že každý úhel $a_{i-1}a_ia_{i+1}$ má velikost alespoň $(1 - \frac{1}{n})\pi$.

6. Každá z $n \geq 4$ drben zná jeden drb, který nikdo jiný nezná. Mluví spolu jen po telefonu a při každém hovoru si navzájem sdělí všechny drby, které znají. Ukažte, že je potřeba alespoň $2n - 4$ hovorů, než všechny vědí všechno.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`