

## Kombinatorické etudy 1 – LS 2011/2012

**1.** (4.5) Bud'  $T$  strom s vrcholy  $1, 2, \dots, n$ . Smažeme list s nejnižším číslem a zapíšeme hodnotu jeho souseda. Opakujeme, dokud nedostaneme strom s jediným vrcholem. Získané posloupnosti budeme říkat kód stromu  $T$ . Dokažte, že

- kód jednoznačně určuje  $T$
- pro každý kód, tvořený  $n - 1$  čísly, z nichž každé je  $1, \dots, n$ , existuje (jednoznačný) strom  $T$
- odvod'te formuli pro počet stromů na  $n$  vrcholech.

**2.** (6.48) Bud'  $G$  graf,  $X, Y, Z \subseteq V(G)$ . Symbolem  $\delta(X)$  značíme počet hran mezi  $X$  a  $V(G) - X$

- $\delta(X \cup Y) + \delta(X \cap Y) \leq \delta(X) + \delta(Y)$
- $\delta(X - Y) + \delta(Y - X) \leq \delta(X) + \delta(Y)$
- $\delta(X - Y - Z) + \delta(Y - Z - X) + \delta(Z - X - Y) + \delta(X \cap Y \cap Z) \leq \delta(X) + \delta(Y) + \delta(Z)$

**3.** (10.10) Jaké jsou nejmenší kubické (tj. 3-regulární) grafy s obvodem 4 a 5? (Obvod je délka nejkratší kružnice v grafu.)

**4.** (11.38)

- (a) Střední doba návratu z  $u$  zpět do  $u$  je  $\frac{2m}{\deg u}$ .
- (b) Střední počet kroků, než se náhodná procházka z  $u$  vrátí zpět do  $u$  jednou konkrétní hranou je  $2m$ .

**5.** (14.26) V rovině je dáno  $N = k^n + 1$  bodů. Ukažte, že můžeme nalézt "skoro rovnou" lomenou čáru s  $k$  úsečkami, tj. body  $a_0, a_1, \dots, a_k$  takové, že každý úhel  $a_{i-1}a_i a_{i+1}$  má velikost alespoň  $(1 - \frac{1}{n})\pi$ .

**6.** Každá z  $n \geq 4$  drben zná jeden drb, který nikdo jiný nezná. Mluví spolu jen po telefonu a při každém hovoru si navzájem sdělí všechny drby, které znají. Ukažte, že je potřeba alespoň  $2n - 4$  hovorů, než všechny vědí všechno.

Nápověda na: <http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/>