# 4. cvičení z MA3 – 25.10.2011

**1.** Jak zobrazují následující funkce komplexní rovinu? (A jak je vůbec definovaná odmocnina?)
Exponenciálu zatím definujme předpisem $\exp(a+bi) = \exp(a)(\cos b + i \sin b)$.
(a) $\bar{z}$
(b) $z^2$
(c) $z^3$
(d) $\sqrt{z}$
(e) $\sqrt[3]{z}$
(f) $\exp(z)$
(g) $\log(z)$
(h) Pokud dvě komplexní čísla $z_1$, $z_2$ splňují $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, co o nich lze říci?
(i) Pro každé $\alpha$, které je komplexní třetí odmocninou z 1 (neboli $\alpha^3 = 1$) nalezněte všechna $z$, pro která $\alpha = \exp(z)$.

**2.** Definujeme exponenciálu $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} .$$

Ukažte, že

- $\exp(0) = 1$
- $\exp' = \exp$
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

**3.** U následujících mocninných řad určete poloměr konvergence a v kruhu konvergence nalezněte součet.
(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$
(c) $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$
(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 x^k$
(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
(f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
(g) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$
(h) $\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)x^k$
(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}$
(j) $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$