# Kombinatorické etudy 6 – LS 2010/2011

**1.** (2.21 – zbylo z minula) Buď $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ množina s částečným uspořádáním $\leq$. Matici $A$ nazveme kompatibilní, pokud

$$A_{i,j} \neq 0 \Rightarrow x_i \leq x_j \, .$$

Ukažte, že součet, součin a (existuje-li) inverze z kompatibilních matic je kompatibilní. — Zbývá už jen inverze. Fakt to je pěkný a lehký!

**2.** (5.13) Každý graf se sudými stupni je možné zorientovat tak, že každý vrchol má stejný vstupní i výstupní stupeň.

**3.** (9.7 – zbylé části z minula) Kategoriální součin grafů je definován následovně: $V(G_1 \times V_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, $E(G_1 \times V_2) = \{\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} : u_1 v_1 \in E(G_1), u_2 v_2 \in E(G_2)\}$. **(Doporučuji obrázek.)**

- $\chi(G \times K_n) = \min\{\chi(G), n\}$
- * Ukažte, že pokud $G$ je souvislý a $\chi(G) > n$, tak $G \times K_n$ má jednoznačné $n$-obarvení (až na permutaci barev).
- Kolik $n$-obarvení může graf mít? Přesněji: pro každé $n$, $k$ rozhodněte, zda existuje graf $G$, který má právě $k$ obarvení $n$ barvami.

**4.** (11.8 – zbylo z minula, už jen dorazit …) Buď $G$ graf, jehož grupa automorfismů obsahuje regulární komutativní podgrupu $\Gamma$. (Regulární znamená, že pro každé $u, v \in V(G)$ existuje *právě jedno* $\gamma \in \Gamma$, že $\gamma(u) = v$, označme ho $\gamma_{u,v}$. Speciálně tedy $G$ je tranzitivní.) Buď $\chi$ *charakter grupy* $\Gamma$ (neboli homomorfismus do komplexních čísel s násobením). Buď $v_0$ jeden z vrcholů $G$. Ukažte, že

$$\sum_{v : v_0 v \in E(G)} \chi(\gamma_{v_0, v})$$

je vlastní číslo $G$.

(11.9) Využijte výše uvedené pro výpočet spektra $n$-rozměrné hyperkrychle $Q_n$.

**5.** (12.5) (Fruchtova věta) Pro každou grupu $\Gamma$ existuje graf $G$, jehož grupa automorfismů je isomorfní s $\Gamma$.

**6.** (15.3 – zbylo z minula) Nechť $0 \leq i < r$. Vytvořme graf $L_i(K_n^r)$ jehož vrcholy jsou $r$-tice z $n$ prvků (čili hyperhrany hypergrafu $K_n^r$), a dvě $r$-tice $A$, $B$ sousedí, právě když $|A \cap B| = i$. Ukažte, že pro dostatečně velké $n$ je každý automorfismus $L_i(K_n^r)$ určen permutací $V(K_n^r)$.