Kombinatorické etudy 3 – LS 2010/2011

1. (3.27) (Pólya-Redfield – pokrač.) Opět budeme počítat zobrazení $D \to R$. Tentokrát budeme mít dvě grupy, Γ_D působící na množině D a Γ_R, která působí na množině R. Řekneme, že zobrazení $f, g : D \to R$ jsou *velmi odlišné*, pokud neexistuje $\pi_D \in \Gamma_D$, $\pi_R \in \Gamma_R$, pro něž by platilo $\pi_R \circ g = f \circ \pi_D$. Jaký je počet velmi odlišných zobrazení z D do R?

(*) Zkuste toto číslo opět vyjádřit pomocí cyklických indexů příslušných grup.

2. (5.9) Nechť G je digraf obsahující vrchol s výstupním stupněm aspoň 3. Ukažte, že G má sudý počet Eulerovských tahů.

3. (9.5) (a) Buď G graf s n vrcholy, $V_1, \ldots, V_k$ rozklad vrcholů takový, že pro každé $1 \le i < j \le k$ existuje $x \in V_i$, $y \in V_j$, pro které xy není hrana. Ukažte, že

$$\chi(G) \le n - k + 1\,.$$

(b) Buď G graf s n vrcholy. Pak

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \le n + 1 \qquad \chi(G)\chi(\bar{G}) \ge n\,.$$

4. (11.7) Předpokládejme, že známe vlastní čísla grafů G_1, G_2. (Tj. vlastní čísla příslušných matic incidence.)

Určete vlastní čísla grafů $G_1 \mathbin{\square} G_2$, $G_1 \boxtimes G_2$.

5. (12.2 – zůstává z minula) Ukažte, že

(a) grupa automorfismů pravidelného dvanáctistěnu je $A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

(b) grupa automorfismů krychle je $S_4 \times \mathbb{Z}_2$. (Tady jsme zjistili, že se jedná o grupu, co obsahuje S_4 i $\mathbb{Z}_2$, a má správný počet prvků. Stačí to?)

6. (15.2 – zůstává z minula) (a) Buď α automorfismus $L(K_n^r)$ (přičemž K_n^r je hypergraf s n vrcholy, kde hrany jsou všechny r-tice, $n \ge 3r$). Pak α je indukováno automorfismem K_n^r, tj. permutací $V(K_n^r)$.

(b) Předchozí výsledek platí pro $2r < n \le 3r$, ale neplatí pro $n \le 2r$.