Kombinatorické etudy 11 – LS 2010/2011

1. (2.26) (Moebiova inverzní formule) Buď $f(x)$ libovolná funkce definovaná na V (částečně uspořádaná množina s $\leq$). Položme $g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$. Pak platí

$$f(x) = \sum_{z \leq x} g(z)\mu(z, x)\,.$$

Ukažte, že princip inkluze a exkluze je speciální případ.

2. (5.19) Nechť G je prostý digraf (bez násobných hran a bez smyček), označme $h(G)$ počet Hamiltonovských cest v G. Ukažte, že $h(G) \equiv h(\bar{G}) \pmod 2$. Je tvrzení pravdivé pro neorientované grafy?

3. (9.11) Ukažte, že graf G je k-obarvitelný právě tehdy, když jej lze zorientovat tak, že každý cyklus C v G má v každém směru zorientovaných alespoň $|E(C)|/k$ hran.

4. (11.12) Nechť kubický graf G je pokryt vrcholově disjunktními kopiemi stromu T, který má dva sousední vrcholy stupně tři a čtyři listy. Ukažte, že G má vlastní číslo 0.

5. (12.7 – zbylo z minula) (a) Každý turnaj má lichý počet automorfismů.

(b)* Každá grupa lichého řádu n je grupa automorfismů nějakého turnaje s $2n$ vrcholy.

6. (15.11) Buďte $x_1, \ldots, x_r$ listy ve stromu T, položme $d_{i,j} = d(x_i, x_j)$. Ukažte, že

(a) pro každé tři indexy i, j, k platí

$$d_{i,j} + d_{j,k} - d_{i,k} \geq 0, \qquad d_{i,j} + d_{j,k} - d_{i,k} \equiv 0 \pmod 2\,.$$

(b) pro každé čtyři indexy i, j, k, l jsou dvě z čísel $d_{i,j} + d_{k,l}$, $d_{i,k} + d_{j,l}$, $d_{i,l} + d_{j,k}$, stejná, třetí je jim nejvýše rovno.

(c) Buďte $d_{i,j}$ čísla splňující (a), (b) a také $d_{i,j} = 0$ právě když $i = j$ a $d_{i,j} = d_{j,i}$. Ukažte, že existuje strom T s listy x_i tak, že $d_{i,j} = d(x_i, x_j)$.