Kombinatorické etudy 6 – ZS 2010/2011

1. (3.23 – zbylo z minula)

(a) Kolik konvexních k-úhelníků lze vytvořit z vrcholů pravidelného n-úhelníku, pokud se dva k-úhelníky lišící se otočením považují za stejné?

(b) Kolik je k-obarvení vrcholů pravidelného n-úhelníku, pokud obarvení lišící se otočením považujeme za stejná?

2. (6.14) Hrany orientovaného stromu G obarvíme dvěma barvami (modře a červeně). Ukažte, že existuje vrchol G, pro který všechny vstupující hrany jsou modré a všechny vystupující červené.

3. (7.11 – zbylo z minula) Buď G bipartitní graf a $k \geq 1$. Ukažte, že G je sjednocení k hranově disjunktních grafů $G_1, \ldots, G_k$ takových, že $\lfloor \deg(v)/k \rfloor \leq d_{G_i}(v) \leq \lceil \deg(v)/k \rceil$ pro všechny $v \in V(G)$, $i \in [k]$.

4. (11.4) Buď T les s n vrcholy, označme a_k počet jeho párování s k hranami. Ukažte, že

$$p_T(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-2} + a_2\lambda^{n-4} - a_3\lambda^{n-6} + \cdots + (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda^{n-2\lfloor n/2 \rfloor} .$$

5. (13.6) Buď H hypergraf a $T \subseteq V(H)$. Kdy má H systém různých reprezentatnů obsahující T?

6. (14.3b – tohle jsme minule nestihli)
Označme $R_k(a) = R_k(a, \ldots, a)$. Dokažte, že

$$R_k^{r+1}(a) < k^{R_k^r(a)^r} .$$

(14.4) Obarvíme hrany K_n dvěma barvami. Ukažte, že existuje hamiltonovská kružnice, která je buď jednobarevná, nebo obsahuje právě dvě jednobarevené cesty.

7. (bonus) Dokažte charakterizaci dvourozměrných variet bez kraje. Pro vyhnutí se analýznickým kejklům uvažujme jenom triangulované variety (čili konečnou množinu trojúhelníčků, které se stýkají vždy dva za hranu a 've vrcholech to vyjde jako v rovině). Ukažte, že každá taková plocha je koule s nalepenýma 'ušima' nebo Möbiovými pásky.

Vysvětlivka: dvourozměrná varieta = plocha, tj. množina bodů, která lokálně vypadá jako $\mathbb{R}^2$. Ale vysvětlení v závorce je ještě konkrétnější.