① $f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^3 + 6x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 6x_3^2$

Podezřelé body

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -3x_1^2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow 2x_3 = x_1^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 6x_1 - 12x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_3$$

$$\Rightarrow x_1 = x_1^2 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{matrix} \right.$$

$\Rightarrow$ 2 pod. body: $(0,1,0)$, $(1,1,\frac{1}{2})$

Ověřujeme pomocí 2. derivací

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} -6x_1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Testujeme matice $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

M_2 je neg. def. (subdet. jsou $-6, 12, -144+72$, čili $- + -$)

M_1 je indef. (vezmi $x = (0,1,0)$, $y = (10,0,1)$

$x^T M_1 x < 0$, $y^T M_1 y > 0$

$\Rightarrow$ lok. max $(1,1,\frac{1}{2})$, $f() = -1 + 3 + 2 - 1 - \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

sedl. bod $(0,1,0)$.

(2) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

$K = [-2,0] \times [0,1]$

K je omez. uz. ⇒ kompaktní, f spojitá

⇒ f nabývá maxima a minima

Hledáme a) uvnitř:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y + 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= 1/3 \\ x &= -4/3 \end{aligned}$$

$$\underbrace{f\left(-\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}\right)}_{\in K} = \frac{16 + 4 + 1 - 36 - \cancel{18}^{\,6} + 9}{9} = -\frac{\cancel{24}^{\,12}}{9} = -\frac{\cancel{8}^{\,4}}{3}$$

b) na hranici (vč. vrcholů)

b1) $x = 0$ $\quad f(0,y) = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \ldots$

min: $f(0,1) = 0$

max $f(0,0) = 1$

b2) $x = -2$ $\quad f(-2,y) = 4 + 2y + y^2 - 6 - 2y + 1$

$= y^2 - 1 \quad \ldots$ min $f(-2,0) = -1$

max $f(-2,1) = 0$

b3) $y=0$ $\quad f(x,0)=x^2+3x+1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x+3=0 \quad \text{pour} \quad x=-\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ mais $\quad f\left(-\frac{3}{2},0\right)=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+1=-\frac{5}{4}$

max $\quad f(0,0)=1$

min $\quad f(-2,0)=4-6+1=-1$

b4) $y=1$ $\quad f(x,1)=x^2-x+\cancel{1}+3x-\cancel{2}+\cancel{1}=x^2+2x$

$=x(x+2)$

max $\quad f(0,1)=f(-2,0)=0$

min $\quad f(-1,0)=-1$

Zivei $\quad$ **max** $\;1$ v $(0,0)$, **min** $\cancel{-\frac{8}{3}}\;-\frac{4}{3}$ v $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

(3) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$M = \{ (x,y) : \underbrace{x^2+7y^2+8xy-225}_{g(x,y)} = 0 \}$

a) M je uzavřená (vzor $\{0\}$ ve spoj. zobr.) ale není omezená. Mějme bod: vezmeme lib. bod $(x_0,y_0) \in M$ a buď $\underline{f_0 = f(x_0,y_0)}$.

Uvažme $M' = M \cap B(0, 2f_0)$.

M' je uz. (průnik dvou uz.) a omez., proto na M' spojitá fce f (složení spoj. polynomu a spoj. $\sqrt{\ }$) nabývá extrémů. Dále

$\forall x \in M \setminus M' \quad f(x) > 2f_0 \Rightarrow$

min f na M' (který se nabývá) je i minimem na M.

b) užijeme Lagr. mult. pro nalezení min f na M, nebo lépe f^2 na M (ekviv., ale snazší).

$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow \quad x = \lambda(x+4y)$

$\qquad\qquad\qquad\quad y = \lambda(7y+4x)$

$(+ \nabla g \neq 0 \Leftarrow (x,y) \neq (0,0)$, neboť $(0,0) \notin M)$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(1-7\lambda) = 16\lambda^2$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{-18} = \begin{cases} -1 \\ 1/9 \end{cases}$$

- $\lambda = -1$ $\quad 2x = -4y \Rightarrow x = -2y$

$$(2y)^2 + 7y^2 + 8(-2y)y - 225 = 0$$

$$y^2 \underbrace{(4+7-16)}_{<0} = 225 \Rightarrow \times$$

- $\lambda = \frac{1}{9}$ $\quad x \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{9} y \Rightarrow y = 2x$

$$x^2 + 7(2x)^2 + 8 \cdot x \cdot 2x = 225$$

$$x^2 \underbrace{(1+28+16)}_{45} = 15^2$$

$$x^2 = 5. \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$y = \pm 2\sqrt{5}$$

Závěr f na M nabývá max. v bodech $\pm(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, max. má hodnotu $\sqrt{5 + 4 \cdot 5} = 5$.