Písemná část zkoušky z matematické analýzy NMAI054 C – 1.2.2011
zimní semestr 2010–2011

Na každý papír napište: číslo příkladu, jméno a paralelku: X (Šámal) nebo Y (Stará).

Příklad 1
Spočtěte následující limitu

$$\lim_{x\to\pi_-} \frac{1+\cos x}{(\log \frac{x}{\pi})2} \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Příklad 2
Rozhodněte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ následující řada konverguje absolutně. Zjistěte, zda pro $\alpha = 0$ řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{n+211} \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Absolutní konvergence: (celkem 5 bodů)
Použijeme limitní srovnávací kritérium s řadou $\sum_n n^{\alpha-1}$. (2 body)
Využijeme $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x/x = 1$ a Heineho větu, vyjde nám (2 body)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{n+211}}{n^{\alpha-1}} = 1$$

Tudíž zadaná řada konverguje absolutně právě když konverguje řada $\sum_n n^{\alpha-1}$, čili pro $\alpha < 0$. (1 bod)
Konvergence pro $\alpha = 0$: (celkem 5 bodů)
Použijeme Lebnizovo kritérium. Označme $a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n+211}$.
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ podle Heineho věty a spojitosti tg v 0. (2 body)
a_n je klesající, neboť tg je rostoucí funkce na intervalu $[0, 1/211]$ a její argument, posloupnost $1/(n+211)$ je klesající. (2 body)
Závěr: pro $\alpha = 0$ řada konverguje, ale ne absolutně. (1 bod)

Příklad 3

Určete definiční obor následující funkce, rozhodněte, ve kterých bodech má funkce derivaci (příp. jednostranné derivace), a spočtěte ji (je).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{pokud } x \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(10 bodů)}$$

Funkce je definována na celém $\mathbb{R}$.

Pro $x \neq 0$ zderivujeme podle vzorců: (4 body)

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2} \cdot x - \ln(1+x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

Pro $x = 0$ využijeme věty o derivaci coby limitě derivací. (celkem 6 bodů)

Nejprve vyšetříme spojitost f v 0. (3 body)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} x = 1 \cdot 0 = f(0)$$

(podle VoLSF, základní limity pro logaritmus a podle VoAL).

Funkce je v 0 spojitá, můžeme tedy psát (3 body)

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 2 - 1 = 1$$

(podle VoAL, VoLSF a základní limity pro logaritmus).

(Věty na přednášce hovořili o jednostranné derivaci coby jednostranné limitě, ale to nevadí: funkce je spojitá, tedy i spojitá zprava, limita na posledním řádku existuje oboustranná, tedy i zprava, takže podle věty z přednášky je $f'_+ = 1$. Obdobně pro derivaci zleva.)

Příklad 4

Vyšetřete průběh následující funkce (tj. najděte definiční obor, obor spojitosti, extrémy, inflexní body, asymptoty, vyšetřete monotonii a konvexitu / konkávnost, chování v krajních bodech definičního oboru, periodicitu a sudost/lichost, nakreslete graf).

$$\frac{1}{x-1} e^{|x|} \qquad \textbf{(20 bodů)}$$

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Na vypracování máte 120 minut.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je ($137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701).

Můžete využívat jeden tahák o formátu A4.