1. bonifikační písemka – Řešení

---

1. Nechť
$$a_n = \frac{3n^2}{5} - \left\lfloor \frac{3n^2}{5} \right\rfloor, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
kde $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? Pokud ano, spočtěte ji.

Dokážeme sporem, že zadaná limita neexistuje. Nechť tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje a rovná se L. Pak také limita každé posloupnosti vybrané z (a_n) je rovna L.
Pokud bude $n_k = 5k$, pak máme vybranou posloupnost (b_n), kde
$$b_k = a_{n_k} = \frac{3(5k)^2}{5} - \left\lfloor \frac{3(5k)^2}{5} \right\rfloor = 3 \cdot 5k^2 - 3 \cdot 5k^2 = 0\,.$$
Zjevně limita $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, tedy $L = 0$.
Vyberme nyní jinou posloupnost: položme $m_k = 5k + 1$. Získáme vybranou posloupnost (c_n), kde
$$\begin{aligned} c_k = a_{m_k} &= \frac{3(5k+1)^2}{5} - \left\lfloor \frac{3(5k+1)^2}{5} \right\rfloor \\ &= 3(5k^2 + 2k + 1/5) - \left\lfloor 3(5k^2 + 2k + 1/5) \right\rfloor \\ &= 3(5k^2 + 2k + 1/5) - 3(5k^2 + 2k) \\ &= 3/5\,. \end{aligned}$$
Limita této vybrané posloupnosti je $3/5$, tudíž $L = 3/5$ a současně již víme $L = 0$, což je spor.

---

2. Nechť $a > 0$ a posloupnost (a_n) je dána rekurentním předpisem $a_1 = a$,
$$a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$
Rozhodněte, zda existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, a pokud ano, spočtěte ji.

Pokud bychom věděli, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje (a označili ji L), víme také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ (vybraná posloupnost). Zároveň však
$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3} = \frac{4L + 2}{L + 3}$$
(pokud výraz na pravé straně má smysl, tj. pokud $L \neq \pm\infty$ a $L \neq -3$).
Získáme kvadratickou rovnici $L^2 + 3L = 4L + 2$, což dává řešení $L = -1$ a $L = 2$. V souhrnu jsme získali, že pokud $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, je $L \in \{\pm\infty, -1, -3, 2\}$.
Indukcí ukážeme, že pro každé n je $a_n > 0$: pro $n = 1$ to máme zadáno; dále pokud $a_n > 0$, pak a_{n+1} je podíl dvou kladných čísel, tj. číslo kladné. Odsud z věty o limitě a uspořádání plyne, že pokud L existuje, je $L \geq 0$.

Dále úpravou rekurence na tvar

$$a_{n+1} = 4 - \frac{10}{a_n + 3} \tag{1}$$

zjišťujeme, že každé číslo a_{n+1} je menší než 4 (využíváme toho, že $a_n > 0$). Tudíž $L \leq 4$. Víme tedy už, že pokud L existuje, je $L = 2$.
K důkazu existence limity využijeme větu, že každá monotónní posloupnost má limitu. Bude šikovné řešit zvlášť tři případy:

- $a = 2$: V tomto případě vidíme (indukcí), že $a_n = 2$ pro všechna n, takže i bez předchozích úvah je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.
- $a < 2$: Snadnou indukcí ukážeme, že pro všechna n je $a_n < 2$. (Pro $n = 1$ to máme zadáno; víme-li to pro n dostaneme to pro $n+1$ ze vstahu (1).) Ukážeme-li, že pro všechna n je $a_{n+1} > a_n$, jsme hotovi. Využitím rekurence v zadání (a toho, že $a_n > 0$, tedy tím spíš $a_n + 3 > 0$) dostaneme ekvivalentní

  $$4a_n + 2 > a_n^2 + 3a_n$$

  a $(a_n - 2)(a_n + 1) < 0$ což je pro $a_n \in (0, 2)$ splněno. Posloupnost je tedy rostoucí, a jsme hotovi.
- $a > 2$: Postupujeme zcela analogicky: stejně snadnou indukcí dokážeme, že pro všechna n je $a_n > 2$. V tomto případě bude (a_n) klesající. To je ekvivalentní nerovnosti

  $$4a_n + 2 < a_n^2 + 3a_n$$

  a $(a_n - 2)(a_n + 1) > 0$ což je pro $a_n > 2$ pravda.

V obou případech tedy je (a_n) monotónní, a tudíž konvergentní.

---

3. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - \sqrt{n^2 - 2n} \right).$$

Spočteme dvě limity: $A = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - n)$ a $B = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n)$. Podle Věty o aritmetice limit je hledaná limita rovna $A - B$, pokud limity A, B existují a rozdíl $A - B$ má smysl.
Standardním trikem "rozšíření odmocnin" získáme

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n) \frac{\sqrt{n^2 - 2n} + n}{\sqrt{n^2 - 2n} + n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n - n^2}{\sqrt{n^2 - 2n} + n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2 - 2n} + n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - 2/n} + 1} \\
&= -1
\end{aligned}$$

V poslední řádce jsme využili Větu o aritmetice limit a toho, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1-2/n} = 1$.
Obdobně spočteme A, využitím vztahu $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$, přičemž budeme značit $x = (n^3+3n^2)^{1/3}$ a $y = n$. Máme tedy

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} x - y \\
&= \lim_{n\to\infty} (x-y)\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+3n^2)-n^3}{(n^3+3n^2)^{2/3}+(n^3+3n^2)^{1/3}n+n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{(n^3+3n^2)^{2/3}+(n^3+3n^2)^{1/3}n+n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(1+3/n)^{2/3}+(1+3/n)^{1/3}+1}
\end{aligned}$$

Použitím věty o strážnících zjistíme, že limita jmenovatele je 3. (Je totiž $1 \leq (1+3/n)^{1/3} \leq 1+3/n$ a $\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} 1+3/n = 1$, tudíž $\lim_{n\to\infty} (1+3/n)^{2/3} = 1$. Dále $\lim_{n\to\infty} (1+3/n)^{2/3} = \left(\lim_{n\to\infty} (1+3/n)^{1/3}\right)^2 = 1$ dle věty o aritmetice limit.)
Odsud již užitím věty o aritmetice limit plyne, že $A = \frac{3}{3} = 1$.
Závěrem dostáváme, že hledaná limita je rovna $A - B = 1 - (-1) = 2$.
Poznamenejme, že příklad by šlo řešit i užitím vzorce $(x-y)(x^5+\cdots+y^5) = x^6 - y^6$.