8. cvičení z MA—14.12.2010

Funkce

Co je to funkce? Jaké vlastnosti funkcí znáte a umíte zkoumat? Uveďte zajímavé příklady funkcí!

1. Dokažte, že funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když $(\forall x, y \in I)\ x \neq y \Longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$.

2. Je-li f neklesající na $(-\infty, a\rangle$ a nerostoucí na $\langle a, \infty)$ pro nějaká $a \in \mathbb{R}$, pak f nabývá maxima.

3. * Nechť f nabývá minima v $a \in \mathbb{R}$. Musí pak existovat $\varepsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a-\varepsilon, a\rangle$ a neklesající na $\langle a, a+\varepsilon)$?

4. Které z následujících operací provedených na neklesající (monotónní) funkce dávají opět neklesající (monotónní) funkci?
Operace: $+, -, \max, \min, \circ$.
Existuje funkce, která není monotónní na žádném intervalu?

Limity funkcí

Jak je limita funkce definovaná? Jak se liší limita funkce a limita posloupnosti?
Budeme používat postupy, které známe už pro limity posloupností: větu o aritmetice limit (VoAL) a větu o strážnících.
Dále též toho, že je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. (Toto je dokonce definice spojitosti.) Jak se na přednášce dozvíme, polynomy, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ jsou spojité ve všech bodech, kde jsou definovány. Dále je spojitý součet, rozdíl, součin i podíl spojitých funkcí (nedělíme-li nulou) a složení spojitých funkcí.
Můžete též za známě považovat limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 1}\frac{\log(1+x)}{x} = 1\,.$$

Brzy přibudou další postupy – věta o limitě složené funkce a pak l'Hospitalovo pravidlo. I pokud je znáte, zkuste se bez nich zatím obejít.

5. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{2x^3-x-1}$
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{2x^3-x-1}$
(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\lfloor x\rfloor}$,
(d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\lfloor x\rfloor - x)$,
(e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x})$,
(f) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b) = 0$.

6. (a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, pro $a = 0, 1, \infty, -\infty$
(b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$,
(d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

7. (a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$,
(b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$,
(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$,

8. (a) $\lim_{x\to 1}(\lfloor x\rfloor - x)$,

(b) $\lim_{x\to 0} x\cdot\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$.

9. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$.

10. (a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+2^x)}{x}$,

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

11. (a) $\lim_{x\to\infty}\big(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\big)$,

(b) $\lim_{x\to\infty}\big(\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)}-x\big)$.

12. (a) $\lim_{x\to\infty} x\big(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\big)$,

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt{1+bx}}{x}$.