B) Řady s libovolnými členy

1. Absolutní konvergence:

$\sum_1^\infty |a_n|$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty a_n$ konverguje

2. alternující řady $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$

(Leibniz) Je-li $a_n \geq 0$, $\{a_n\}$ nerostoucí posl., $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
pak $\sum (-1)^{n-1} a_n$ konverguje.

Příklady:

1) $\sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{n!}$ konverguje absolutně pro všechna $a \in R$

$a = 0$ – zřejmé; $a \neq 0$:

$\sum_1^\infty \frac{|a^n|}{n!}$ konverguje pro v. $|a| \in (0, +\infty)$ (viz oddíl A1),

tedy $\sum_0^\infty \frac{a^n}{n!}$ konverguje absolutně pro v. $a \in R$

(a jejíž součet je e^a – viz MAI 3)

2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ konverguje absolutně:

$\sum_1^\infty \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje

3) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ nekonverguje absolutně, neboť $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ diverg.;

ale dle Leibnizova kritéria konverguje (neabsolutně), neboť

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající posloupnost

4) Stejně: $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}$ konverguje neabsolutně:

(i) $\sum_{1}^{\infty} |a_n| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverguje (srovnávací krit.)

(ii) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right\}$ je klesající posloupnost, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$,

tedy řada konverguje (Leibniz)

5) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ konverguje neabsolutně:

(i) $\sum_{1}^{\infty} |a_n| = \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverguje (srovnávací krit.)

(ii) ale: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ a posloupnost $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ je klesající:

? $\quad \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \overset{?}{\le} \frac{n}{n^2+1} \quad n \in N$:

$$(n+1)(n^2+1) \overset{?}{\le} n[(n+1)^2+1]$$

$$1 \le n^2+n \quad \ldots \text{ platí pro v. } n \in N$$

Pozor! Když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \ge 0$, ale posloupnost $\{a_n\}$ není monotónní, pak nelze obecně o konvergenci řady $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ nic říci – řada může konvergovat i divergovat! (Viz další příklady)

Příklad 1) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ diverguje, i když $\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$

$$\frac{2+(-1)^n}{n} \le \frac{3}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$$

$\left\{\frac{2+(-1)^n}{n}\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$ není monotónní jak je to s konvergencí?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right) -$$

kdyby daná řada konvergovala, pak, protože i řada $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je řada konvergentní, by konvergovala i řada $\sum_1^{\infty} \frac{2}{n}$ –

– což je spor ($\sum_1^{\infty} \frac{2}{n}$ je divergentní řada)

<u>Příklad 2)</u> $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \cdots$$

<u>konverguje neabsolutně</u>

1) <u>absolutní konvergence</u>: $\frac{1}{n+(-1)^n} \geq \frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverg. $\Rightarrow$

$\underset{\text{srovn. krit.}}{\Rightarrow}$ $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n}$ diverguje

2) <u>neabsolutní konvergence</u>:

$$S_{2n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2k(2k+1)} = S \in R,$$

neboť $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)}$ je konvergentní řada (srovn. krit.)

a $$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + \underbrace{\frac{1}{2n+3}}_{\to 0}\right) = \lim S_{2n} = S,$$ tedy

i $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (a tedy řada konverguje)

Cvičení: Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}$ (k. absolutně) ; $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$ (k. absolutně)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ (k. neabsolutně) ; $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ (k. neabsolutně)

$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ (diverguje)

V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n\,3^n}$ (konverg. abs. pro $a \in (-3,3)$, neabs. pro $a=-3$, jinde diverguje)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ (konverg. abs. pro $a \in (-1,1)$, neabs. pro $a=-1$, jinde diverguje)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}(a+1)^n$ (konverguje abs. pro $a \in \langle -2,0 \rangle$, jinde diverguje)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+2)^n}{\sqrt{n+1}}$ (konverg. absolutně pro $a \in (-3,-2)$, neabs. pro $a=-3$, jinde diverguje)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$ (konverg. abs. pro $a \in (-e,e)$)