Cvičení: vyšetřete, zda řada konverguje nebo diverguje:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$ (d) ; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001}$ (d), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ (d) ;

3) $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ (k) ; 4) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$ (k) ; 5) $\sum\limits_{1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$ (k) ;

6) $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$ (d) ; 7) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$ (k.)

8) $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$ (k) ; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\dots n!}{(2n)!}$ (k).

9) pro jaká $a>0$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$ ? .

(iii) Kritéria Cauchyho a D'Alambertova (srovnání s geometrickou řadou)

Cauchyho limitní kritérium:

$0 \le a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ ; pak pro $a<1$ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konverguje

pro $a>1$ $\sum a_n$ diverguje.

D'Alambertovo limitní kritérium

$0 < a_n$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ ; pak pro $a<1$ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konverguje

pro $a>1$ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Pozn: Je-li $a=1$, pak limitní kritéria nic nedokáží, je třeba užít jiná kritéria - např. nelimitní Cauchyho nebo D'Alambertovo, nebo jiná (Raabeho, integrální)

Příklady:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ konverguje:

D'Alamb.: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$

Cauchy: $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3} = \frac{1}{3}$

$\underset{(\text{D'Al., Cauch.})}{\Longrightarrow} \sum \frac{n^2}{3^n}$ konverguje.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konverguje pro všechna $a>0$:

D'Alamb.: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 \ (<1)$,

tedy (D'Alam. limitní krit.) řada konverguje

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$ konverguje:

Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n+1} = \frac{1}{3}$, tedy

řada (Cauchyho limitní krit.) konverguje

4) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konverguje:

D'Alamb.: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ diverguje

Cauchy: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = 1$ – nelze nic říci

ale: $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \geq 1 \quad \forall n\in N$, tedy

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tedy <u>řada diverguje</u>

( také lze užít nelimitního Cauch. kritéria:
$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nek. mnoho $n\in N \Rightarrow \sum a_n$ diverguje )

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ :

opět: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$, ale zde $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n+2} < 1$,

tedy nelze užít ani nelimitního Cauch. kritéria,

ale:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{\to 1} = \frac{1}{e} \neq 0$$ , <u>tedy řada diverguje</u>

<u>Cvičení</u>: vyšetřete konvergenci řad:

$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n$ (k) ; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ (k) ; $\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ (k)

$\sum_{1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ (d) , $\sum_{1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (d) ; $\sum_{1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ (k)

$\sum_{1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$ (k)