# MAT 1 - cvičení - nekonečné číselné řady

## I. Definice konvergence, resp. divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, def. $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. ($s_k$ – částečný součet)

$\sum_1^{\infty} a_n$ konverguje, ^t.-li $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = s \in R$

$\sum_1^{\infty} a_n$ diverguje, když $\lim_{k\to\infty} s_k = \pm\infty$ nebo posloupnost $\{s_k\}$ limitu nemá

**Bolzano - Cauch. podmínka konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall p \in N : \left|\sum_{n}^{n+p} a_n\right| < \varepsilon$$

**nutná podmínka konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:**

$$\sum_1^{\infty} a_n \text{ konverguje} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

**Příklady:**

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ pro } |q| < 1 \quad (\text{zde rovnáme } 0^0 = 1)$$

a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ diverguje pro $|q| \geq 1$.

(i) pro $q = 1$ je $s_k = k$, $\lim_{k\to\infty} s_k = +\infty$

(ii) pro $|q| > 1$ je: $\lim q^n = +\infty$ pro $q > 1$

$\{q^n\}$ limitu nemá pro $q \leq -1$ $\Big\} \Rightarrow \sum_0^{\infty} q^n$ diverguje pro $q > 1$ a $q \leq -1$

(iii) pro $|q| < 1$: $s_{k+1} = \dfrac{1 - q^{k+1}}{1-q}$, $\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = 0$ pro $|q| < 1$,

tedy $\lim_{k\to\infty} s_{k+1} \left(= \lim_{k\to\infty} s_k\right) = \dfrac{1}{1-q}$

2. Je dána posloupnost $\{a_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = a - a_1$$

$$s_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_k - a_{k-1}) + (a_{k+1} - a_k) =$$

$$= a_{k+1} - a_1$$

tedy, $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = a - a_1 \quad \left( = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \right)$

odtud: $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{k\to\infty} \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$

3. $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (harmonická řada):

Vezmeme $\displaystyle s_{2k} - s_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \geq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{k+j} \geq \frac{1}{2k} \text{ pro } j = 1, \dots k$$

tedy, k $\varepsilon = \frac{1}{2}$ pro lib. $k \in \mathbb{N}$ existuje $p = k$ tak, že

$|s_{k+p} - s_k| \geq \frac{1}{2}$ $(= \varepsilon)$ $\Rightarrow$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje

(B-C. podmínka)

4. Vyšetřete, zda dané řady konvergují, resp. divergují:

(i) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1}$ diverguje, neboť $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1} = \frac{1}{2} \neq 0$

(není splněna nutná podmínka konvergence řady)

(ii) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \lim_{k\to\infty} \left( \sqrt{k+1} - 1 \right) = +\infty$

(rozšíření zlomku výrazem $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$), tedy řada diverguje.

(iii) $$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-3k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-3})^k = \frac{1}{1-e^{-3}}$$

(součet geometrické řady s $q = e^{-3} < 1$)

(iv) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pro } x \in (-1,1)$$

geometrická řada s kvocientem $q = -x^2$ – je konvergentní pro $|-x^2| < 1$, tj. pro $x \in (-1,1)$, jinak diverguje

Cvičení:

1. Spočtěte součet řady (nebo ukažte, že řada diverguje):

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n}$ $(= -1)$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ $(= \frac{1}{2})$ (rozložte $\frac{1}{4k^2-1}$ na rozdíl dvou zlomků)

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ (diverguje)

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (diverguje)

(v) Dokažte: a) $\sum_1^{\infty} a_n$, $\sum_1^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, pak také $\sum_1^{\infty} (a_n+b_n)$ konverguje a $\sum_1^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_1^{\infty} a_n + \sum_1^{\infty} b_n$

b) $\sum_1^{\infty} a_n$ konverguje, $c \in \mathbb{R}$, pak také konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ a platí: $\sum_1^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$

---

(vi) Ukažte (dle definice), že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje

(lze užít odhad $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{k}$ – viz matematické indukce)

---

(nebo $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ )

---

(vii) Užitím znalostí součtu řad (dokáže se v MAI 3)
(konvergenci i my dále)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

a $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \text{ pro lib. } a \in R$$

sečtěte řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \quad (= \ln 4 - 1) \; ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} \quad (= 3e^2) \; ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \quad (= 2e)$$

---

## II. Vyšetřování konvergence řady

(konvergence, resp. divergence řady nezávisí na konečně
1. mnoho členech řady, když dále budeme předpokládat,
že předpokládané vlastnosti mají všechny členy řady
(bez újmy na obecnosti)