I. **Průběh funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$**

1. **Definiční obor, nulové hodnoty a vlastnosti**

$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) \geq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – globální minimum fce

f je spojitá v D_f (součin dvou spojitých funkcí)

2. **limity v krajních bodech:**

$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$ (limita typu $\infty \cdot \infty$, $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$)

$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \left| \text{"}\infty \cdot 0\text{"} \right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{\text{l'H. } \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \underset{\text{l'H. } \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

3. **Vypočti $f'(x)$, monotonie, lokální a globální extrémy:**

$f'(x) = x(2-x)e^{-x}$ v $D_f = \mathbb{R}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ a $x = 2$ ... stacionární body (podezřelé z extrému)

$f'(x) < 0$ v $(-\infty, 0) \Rightarrow f$ klesající v $(-\infty, 0\rangle$

$f'(x) > 0$ v $(0, 2) \Rightarrow f$ rostoucí v $\langle 0, 2\rangle$

$f'(x) < 0$ v $(2, +\infty) \Rightarrow f$ klesající v $\langle 2, +\infty)$

odtud: v $x = 0$ je lokální i globální minimum (viz 1)

v $x = 2$ má funkce ostré lokální maximum ($f(2) = \frac{4}{e^2}$)

f nemá globální maximum, neboť $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

4. **Vypočti $f''(x)$, vyšetři, kde je funkce konvexní, resp. konkávní, inflexní body.**

$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$ v $D_f = \mathbb{R}$;

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ – kritické body pro inflexi

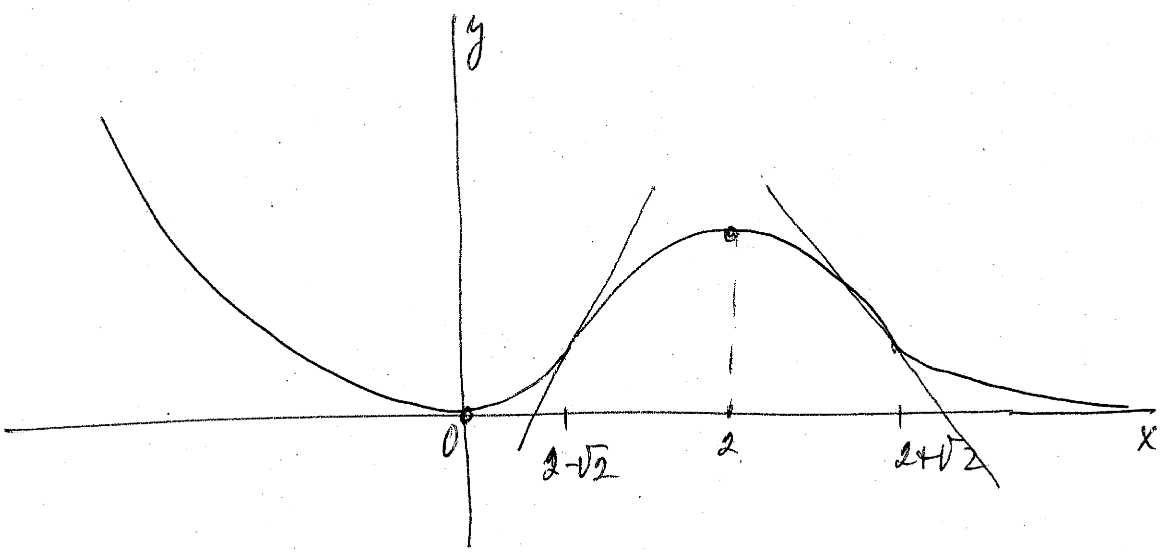
$f'' > 0$ v $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ $\Rightarrow$ f je konvexní v $(-\infty, 2-\sqrt{2})$

$f'' < 0$ v $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ $\Rightarrow$ f je konkávní v $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

$f'' > 0$ v $(2+\sqrt{2}, +\infty)$ $\Rightarrow$ f je konvexní v $(2+\sqrt{2}, +\infty)$,

tedy, funkce má v bodech $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ inflexi.

<u>Graf (přibližně)</u>:



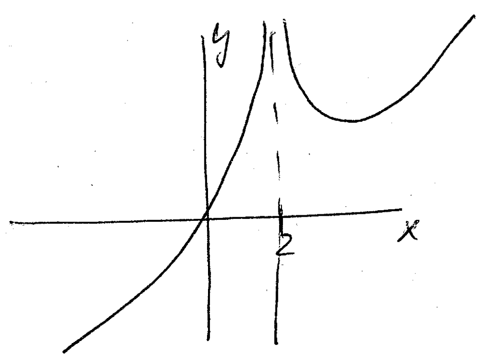
II. Průběh funkce $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

1) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = 0 \iff x = 0$
$f(x) > 0$ v $(0, +\infty)$, $f(x) < 0$ v $(-\infty, 0)$
f je spojitá v D_f

2) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \left| \text{"} \frac{\infty}{\infty} \text{"} \right| = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \left| \frac{2^3}{0+} \right| = +\infty$$

odhad grafu:



3) $f'(x)$, monotonie, globální a lokální extrémy

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \implies f$ nenabývá globálních extrémů (ani glob. maxima, ani glob. minima)

$$f'(x) = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}, \quad x \in D_f$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ nebo $x = 6$ – stac. body (podezřelé z lokálních extrémů)

$f'(x) > 0$ v $(-\infty, 0) \implies f$ roste v $(-\infty, 0\rangle$
$f'(x) > 0$ v $(0, 2) \implies f$ roste v $\langle 0, 2)$
$\Big\} \implies f$ je rostoucí v $(-\infty, 2)$, v $x = 0$ není lok. extrém!

$f'(x) < 0$ v $(2,6)$ $\Rightarrow$ f je klesající v $(2,6\rangle$

$f'(x) > 0$ v $(6,+\infty)$ $\Rightarrow$ f je rostoucí v $\langle 6,+\infty)$,

tedy, v <u>bodě $x=6$ má f ostré lokální minimum</u>

4) <u>$f''(x)$, upřesnit, kde je fce konvexní, resp. konkávní, inflexní body</u>

$$f''(x) = \frac{24x}{(x-2)^4} \text{ v } D_f, \qquad f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$ – kritický bod pro inflexi

$f''(x)<0$ v $(-\infty,0)$ $\Rightarrow$ f je konkávní v $(-\infty,0)$

$f''(x)>0$ v $(0,2)$ $\Rightarrow$ f je konvexní v $(0,2)$

$f''(x)>0$ v $(2,+\infty)$ $\Rightarrow$ — " — v $(2,+\infty)$

v $x=0$ je inflexe, $(0,0)$ je infl. bod, tečna – osa x

5) funkce $\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ jde k $+\infty$ pro $x\to+\infty$ „skoro jako" x,

v takovém případě je možné většinou najít přímku o rovnici $y=ax+b$, $a\neq 0$ (šikmou asymptotu), ke které se graf fce „blíží" — $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ (analogicky pro $x\to-\infty$):

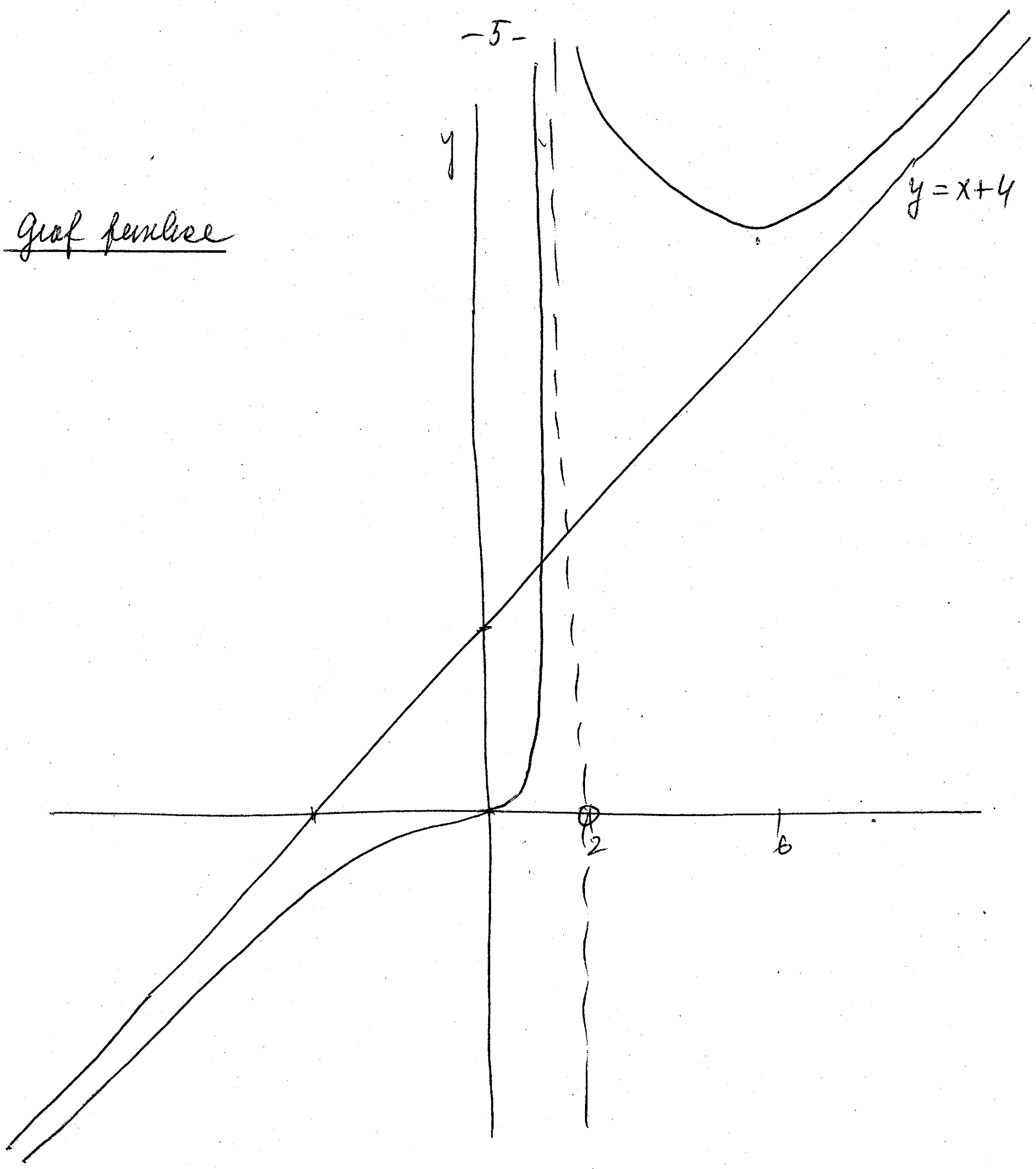
je-li $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}$, a $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b\in\mathbb{R}$, pak

$y=ax+b$ je rovnice asymptoty grafu fce v $+\infty$ (stejně pro $-\infty$)

zde:
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x-2)^2}=1,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x-2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-4x}{(x-2)^2}=4,$$

<u>tedy funkce má šikmou asymptotu v $\pm\infty$ $\quad y=x+4$</u>

Graf funkce



III. Průběh funkce $f(x) = x - \ln(x+1)$

1. $D_f = \{ x \in \mathbb{R};\ x+1 > 0 \} = (-1, +\infty)$

   f je spojitá v D_f

2. $\lim\limits_{x \to -1+} (x - \ln(x+1)) = +\infty \qquad \left(\lim\limits_{x\to -1+} \ln(x+1) = \lim\limits_{y \to 0+} \ln y = -\infty \right)$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln(x+1)) = |\infty - \infty| = \lim\limits_{x\to+\infty} x \left(1 - \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 1}\right) = \infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \underset{l'Hosp.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0$

3. $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \ x \in (-1, +\infty)$

   $f'(x) = 0 \iff x = 0$

   $f'(x) < 0$ pro $x \in (-1, 0) \Rightarrow f$ je klesající v $(-1, 0\rangle$

   $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ je rostoucí v $\langle 0, +\infty$ $\Big\} \Rightarrow$

   $\Rightarrow$ v bodě $x = 0$ má f ostré lokální i globální minimum

   (limity v $-1+$ a $+\infty$ jsou $+\infty$), $f(0) = 0$

   tedy, $x - \ln(x+1) \geq 0$ pro $x \in (-1, +\infty)$, tj. $\ln(x+1) \leq x$ v $(-1, +\infty)$!

4. $f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x) > 0$ v $(-1, +\infty) \Rightarrow$

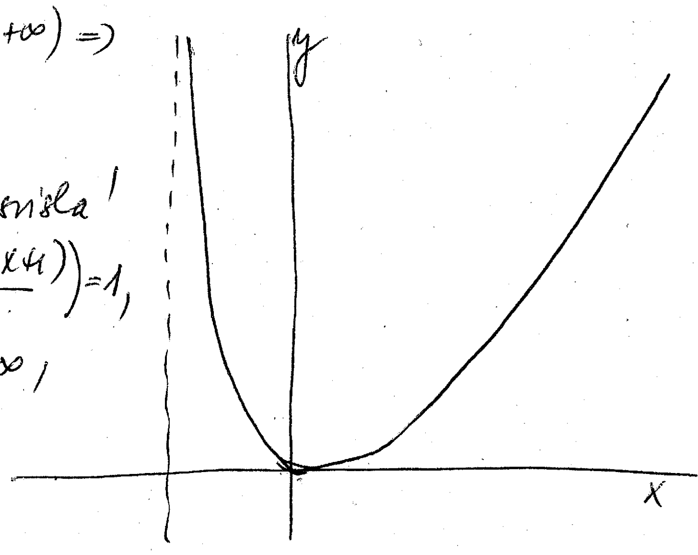
   $\Rightarrow f$ je konvexní v D_f

5. Asymptoty: asymptota $x = -1$ – svislá!

   v $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \left(\frac{x - \ln(x+1)}{x}\right) = 1$,

   ale $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$,

   pro tedy asymptotu nemá!



IV. Průběh funkce $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

1) $D_f = \{x \in R;\ \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \le 1\} = R$,

neboť: $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1 \quad | \cdot (1+x^2)$

$$-1-x^2 \le 2x \le 1+x^2$$

$$0 \le (1-2x+x^2) \text{ platí } \forall x \in R$$

$$0 \le 1+2x+x^2 \qquad \text{—||—}$$

f je funkce lichá, obor hodnot $H_f \subset \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, tedy je omezená

$f(x) > 0$ v $(0,+\infty)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f(x) < 0$ v $(-\infty, 0)$

f je spojitá v R (spojitost složené funkce)

arcsin nabývá maxima pro $x = 1$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a minima pro $x = -1$ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$,

$f: \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ má glob. maximum v $x = 1$ $\left(= \frac{\pi}{2}\right)$
a glob. minimum v $x = -1$ $\left(= -\frac{\pi}{2}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \lim\limits_{y \to 0} \arcsin y = 0$ (věta o limitě složené funkce, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$)

3) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} =$

! pro $x \neq \pm 1$ $\qquad = \frac{2}{1+x^2} \cdot \operatorname{sgn}(1-x^2)$

$f'_+(1) = -1$, $\left(= \lim\limits_{x \to 1+} f'(x)\right) = \lim\limits_{x \to 1+} \frac{2}{1+x^2}(-1)$ (neboť f je spojitá v bodech ± 1)

! $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1-} f'(x) = \lim \frac{2}{1+x^2} = 1$

analog. $f'_-(-1) = -1$, $f'_+(-1) = 1$

$\Big\}$ v bodech $x = \pm 1$ nemá funkce oboustrannou derivaci

Teď: $x = \pm 1$ jsou kritické body pro lok. extrém:

$f'(x) < 0$ v $(-\infty, -1)$ $\Rightarrow$ f je klesající v $(-\infty, -1\rangle$
$f'(x) > 0$ v $(-1, 1)$ $\Rightarrow$ f je rostoucí v $\langle -1, 1\rangle$
$f'(x) < 0$ v $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$ f je klesající v $\langle 1, +\infty)$,

tedy opět vyjde (jak víme ze začátku), že v bodě $x=1$ je ostré lokální i globální maximum $\left(=\frac{\pi}{2}\right)$ a v bodě $x=-1$ je ostré lokální i globální minimum $\left(=-\frac{\pi}{2}\right)$

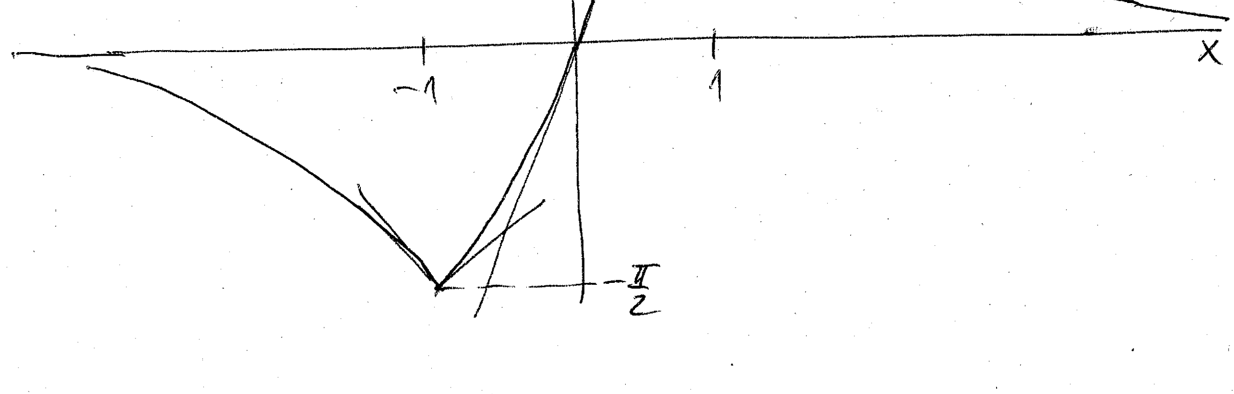
4) $f''(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2} \cdot \operatorname{sgn}(1-x^2)$
$x \neq \pm 1$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ... bod „podezřelý" z inflexe

$f''(x) < 0$ v $(-\infty, -1)$ $\Rightarrow$ f je konkávní v $(-\infty, -1)$
$f''(x) > 0$ v $(-1, 0)$ $\Rightarrow$ f je konvexní v $(-1, 0)$
$f''(x) < 0$ v $(0, 1)$ $\Rightarrow$ f je konkávní v $(0, 1)$
$f''(x) > 0$ v $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$ f je konvexní v $(1, +\infty)$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ v $x=0$ má f inflexi – $(0,0)$ je inflexní bod,
$f'(0) = 2$ (tečna: $y = 2x$)

5) graf:



V. $f(x) = x\,e^{-|x-1|}$ $\left(= x\,e^{-(x-1)\operatorname{sgn}(x-1)} = \begin{cases} x\,e^{1-x}, & x \in \langle 1, +\infty) \\ x\,e^{x-1}, & x \in (-\infty, 1) \end{cases} \right)$

1) $D_f = \mathbb{R}$; $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $f(x)>0$ v $(0,+\infty)$, $f(x)<0$ v $(-\infty,0)$,
f je spojitá v D_f

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{1-x} = \left|\text{„}\infty\cdot 0\text{"}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x-1}} \underset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^{x-1}} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{x-1} = \left|\text{„}-\infty\cdot 0\text{"}\right| = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{1-x}} \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{1-x}} = 0$

3) f je spojitá v $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $f(0)=0$, $\left.\begin{matrix} f(x)>0 \text{ v } (0,+\infty) \\ f(x)<0 \text{ v } (-\infty,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f nabývá glob. maxima v $(0,+\infty)$ a glob. minima v $(-\infty,0)$:

? kde – „podezřelé" body – kde $f'(x)=0$ nebo kde f nemá derivaci:

$f'(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)}\cdot(1-x), & x>1 \\ e^{x-1}(x+1), & x<1 \end{cases}$;

! $x \neq 1$

v int. $(-\infty, 1)$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ – kritický bod pro lok. extrém

f je spojitá v bodě $x=1$, tedy lze:

$\left.\begin{matrix} f'_+(1) = \lim\limits_{x\to1+} f'(x) = \lim\limits_{x\to1+} e^{-(x-1)}(1-x) = 0 \quad (\text{„}1\cdot 0\text{"}) \\ f'_-(1) = \lim\limits_{x\to1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to1-} e^{x-1}(x+1) = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f nemá derivaci v bodě $x=1$ (jen jednostranné derivace) –
– tedy $x=1$ je další podezřelý bod z extrému –
(z předchozího vyšetřování – v bodě $x=1$ je globální (i lok.) maximum, v bodě $x=-1$ je globální (i lok.) minimum

Také lze potvrdit vyšetřením monotonie:

v $(-\infty,-1)$ je $f'(x)<0 \Rightarrow f$ je klesající na $(-\infty,-1\rangle$
v $(-1,1)$ je $f'(x)>0 \Rightarrow f$ je rostoucí na $\langle -1,1\rangle$
v $(1,+\infty)$ je $f'(x)<0 \Rightarrow f$ je klesající na $\langle 1,+\infty)$

4) $$f''(x) = \begin{cases} (x-2)\,e^{-(x-1)}, & x>1 \\ (x+2)\,e^{x-1}, & x<1 \end{cases}$$

$f''(x)=0$ pro $x=2$ a $x=-2$, v bodě $x=1$ f nemá druhou derivaci

Tedy:

v $(-\infty,-2)$ je $f''(x)<0 \Rightarrow f$ je konkávní v $(-\infty,-2)$
v $(-2,1)$ je $f''(x)>0 \Rightarrow f$ je konvexní v $(-2,1)$
v $(1,2)$ je $f''(x)<0 \Rightarrow f$ je konkávní v $(1,2)$
v $(2,\infty)$ je $f''(x)>0 \Rightarrow f$ je konvexní v $(2,+\infty)$,

Tedy, v bodech $x=2$ i $x=-2$ má f inflexi

5) <u>Graf</u>: glob. max: $f(1)=1$ inflexní body:
glob. min: $f(-1) = -e^{-2}$ $\left[-2,-\frac{2}{e^3}\right], \left[2,\frac{2}{e}\right]$