Kombinatorické etudy 5

1. (3.19) Kolik je permutací $\{1, 2, \dots, n\}$ takových, že pro žádnou trojici indexů $i < j < k$ neplatí $\pi(j) < \pi(i) < \pi(k)$?

2. (5.27) Buď G 4-regulární rovinný graf. (a) Ukažte, že ho lze zorientovat tak, že do i z každého vrcholu povedou dvě hrany, a hrany dovnitř a ven se střídají. (Jinými slovy, dvě protilehlé vedou dovnitř.)

(b) Ukažte, že nelze hrany graf obarvit dvěma barvami tak, aby se u každého vrcholu barvy střídaly.

3. (6.6) (a) Každý souvislý graf má vrchol, jehož odebrání nepokazí souvislost. Jak je to pro orientované silně souvislé grafy?

(b) Buď G souvislý graf bez třešně (dva vrcholy stupně 1 se společným sousedem). Ukažte, že z G lze odebrat dva sousední vrcholy a zachovat souvislost.

(c) Buď G souvislý graf, který není ani kružnice ani úplný graf. Ukažte, že z G lze odebrat dva nesousední vrcholy a zachovat souvislost.

4. (7.5) Buď G bipartitní graf s partitami A, B. Označme

$$\delta = \max\{|X| - |N_G(X)| : X \subseteq A\}\,.$$

Ukažte, že $\nu(G) = |A| - \delta$.

5. (8.5) *Jádro (kernel)* orientovaného grafu G je nezávislá množina $S \subseteq V(G)$, taková, že pro každý vrchol $x \in V(G) \setminus S$ existuje $y \in S$, že (y, x) je hrana G.

(a) Každý symetricky orientovaný graf (šipky vedou vždy oběma směry) obsahuje jádro.

(b) Acyklický graf má jednoznačné jádro.

(c) Pokud každý cyklus v grafu má sudou délku, tak tento graf obsahuje jádro.

6. (10.5) (a) Každý 2-souvislý graf s $n \geq 5$ vrcholy a $2n - 2$ hranami obsahuje dělení $K_{2,3}$.

(b) Každý 3-souvislý graf s $n \geq 6$ vrcholy a $3n - 5$ hranami obsahuje dělení $K_{3,3}$.

(c) Kolik hran zaručí, že graf obsahuje dělení $K_{2,3}$, resp. $K_{3,3}$, bez výše uvedených předpokladů na souvislost?