

## Kombinatorické etudy 2

1. V soutěži ve skoku dalekém skáče  $n$  skokanů v náhodném pořadí. Jaká je střední hodnota počtu rekordů? Jaká je pravděpodobnost, že nastane právě  $k$  rekordů?
2. Dokažte Eulerovu formuli: pro souvislý rovinný graf s  $v$  vrcholy,  $e$  hranami a  $f$  stěnami platí  $v - e + f = 2$ . Pokud už nějaký důkaz znáte, vymyslete jiný! Případně najděte variantu pro nesouvislé grafy, grafy na jiných plochách než je rovina, případně vícerozměrné varianty.
3. Mějme graf  $G$  se skóre  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ . Předpokládejme, že  $d_k \geq k$  pro všechna  $k \leq n - d_n - 1$ . Pak je  $G$  souvislý.
4. Buď  $G$  bipartitní graf. Pak  $\nu(G) = \tau(G)$  a  $\rho(G) = \alpha(G)$ . Zde  $\nu(G)$  je velikost největšího párování,  $\alpha(G)$  velikost největší nezávislé množiny,  $\rho(G)$  je minimální počet hran, které pokrývají všechny vrcholy (hranové pokrytí), a konečně  $\tau(G)$  minimální počet vrcholů, které protínají všechny hrany (vrcholové pokrytí – transversála).
5. Vrcholy grafu  $G$  lze pokrýt nejvýše  $\alpha(G)$  vrcholově disjunktními cestami.
6.
  - (a) Pokud každý vrchol grafu  $G$  má stupeň alespoň 3, tak  $G$  obsahuje kružnici s tětivou.
  - (b) Stejný závěr platí pokud graf s  $n \geq 4$  vrcholy má alespoň  $2n - 3$  hran.