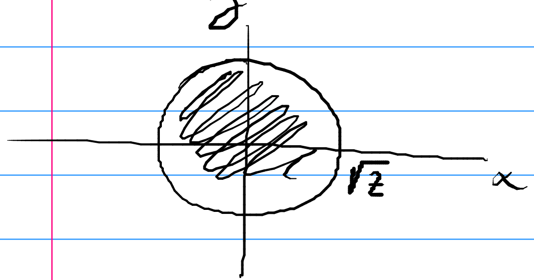
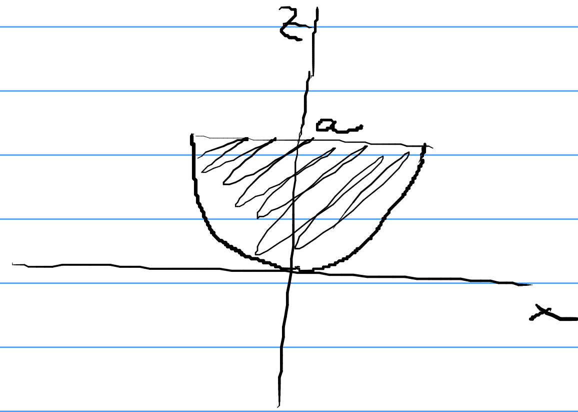
(2) $M = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z ;\ 0 \le z \le a \}$





M vznikne rotací fce $f(z) = \sqrt{z}$ $\quad (z \in [0, a])$

kolem osy z.

$\Rightarrow$ objem $= \int_0^a \pi (\sqrt{z})^2 = \int_0^a \pi z = \left[\pi \frac{z^2}{2}\right]_0^a$

$= \underline{\underline{\frac{\pi a^2}{2}}}$

$\Rightarrow$ povrch pláště $= \int_0^a 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2} \cdot \sqrt{z}$

$= \int_0^a 2\pi \sqrt{z + \frac{1}{4}} = \left[2\pi \frac{2}{3} \cdot \left(z + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} \left(\left(a + \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right)}}$

$\Rightarrow$ povrch dna $= \pi (\sqrt{a})^2 = \underline{\pi a}$

$\boxed{\text{povrch} = \frac{4\pi}{3} \left(\left(a + \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right) + \pi a}$

③ $M = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1 \}$

najděte glob. extrémy fce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

na množině M.

$g() = x^4 + y^4 - 1$

$\nabla g = (4x^3, 4y^3) \neq \vec{0}$
(protože $[0,0] \notin M$)

$\Rightarrow$ v bodě (lok.) extrému je $\nabla f = \lambda \nabla g$ (Lagr. věta)

$2x = \lambda 4x^3 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{2\lambda}$ ($\Rightarrow \lambda > 0$)

$4y = \lambda 4y^3 \Rightarrow y = 0 \vee y^2 = \frac{1}{\lambda}$ ($\Rightarrow \lambda > 0$)

$f() = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right)$

$1 = x^4 + y^4$

$= \frac{1}{\lambda^2} \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \right)}$

místo kteréhokoli čísla
(*) může být $0 \Rightarrow 2^2$ možnosti
(jedna z nich, $1 = \frac{1}{\lambda^2} \cdot (0+0)$
není řešení)

1) $x,y \neq 0$ $\quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{5/4}$, $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $f() = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+2\right) = \sqrt{5}$ max

2) $x = 0 \neq y$ $\quad \frac{1}{\lambda^2} = 1$, $\frac{1}{\lambda} = 1$, $f() = 1 \cdot (0+2) = 2$

3) $x \neq 0 = y$ $\quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1/4}$, $\frac{1}{\lambda} = 2$, $f() = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = 1$ min

Z těchto podezřelých bodů

nejmenší hodnota f je v $[\pm 1, 0]$ $(f(\cdot) = 1)$

největší hodnota f je v $\left[\pm \frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$ $(f(\cdot) = \sqrt{5})$

Abychom ukázali, že je to glob. min. a max, musíme zjistit, že glob. min. a max. se skutečně nabývá.

To plyne z toho, že f je spojitá fce (jasné)

a M kompaktní množina

(M je omezená : $M \subseteq [-1, 1]^2$

M je uzavřená : $M = g^{-1}(\{0\})$, g je spoj.,

$\{0\}$ je uzavřená).

(1) $$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x + 1}{2\cos^2 x + 1}\, dx =$$

$$t = \operatorname{tg} x \qquad \left(t(0) = 0 ,\ t\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \right)$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1} \qquad dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

$$dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{t^2}{t^2+1} + 1}{2\,\frac{1}{t^2+1} + 1}\, \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \int_0^1 \frac{2t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)} = \underline{\int_0^1 \frac{5/2}{t^2+3} + \frac{-1/2}{t^2+1} = I}$$

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \underline{\operatorname{arctg} t + C}$$

$$\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, \frac{dt}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C}$$

$$I = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\arctan t\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \arctan 1$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}$$