

8. cvičení z MA — 15. a 16.4.2009

(papír s nápisem 7. cvičení není)

Funkce více proměnných

Limity a vůbec

1. Spočtete následující limity

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x}$,
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$.

2. Ve kterých bodech jsou následující funkce definovány? Spojité? Jsou omezené?

- (a) $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$,
- (b) $\cos \frac{1}{xy}$,
- (c) $\frac{1}{1 - x^2 - y^2}$,
- (d) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$,
- (e) $\frac{1}{(x-y)^2}$,
- (f) $\frac{\sin xy}{|x| + |y|}$.

Parciální derivace, totální diferenciál

3. Spočtete parciální derivace (podle všech proměnných) funkcí

- (a) $x^2 + 4xy^3 + y^5$,
- (b) x^{y^2} ,
- (c) $(1+x)^k(1+y)^\ell(1+z)^m$,
- (d) $\log(1+x)\log(1+y)$,
- (e) $(1+x)^{1+y}$.

4. Prověřte rovnost $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pro

- (a) $f(x, y) = x^2 + 4xy^3 + y^5$,
- (b) $f(x, y) = x^{y^2}$.

5. Napište totální diferenciál (v $(x, y) = (0, 0)$) pro funkce

- (a) $(1+x)^k(1+y)^\ell(1+z)^m$,
- (b) $\log(1+x)\log(1+y)$,
- (c) $(1+x)^{1+y}$.

6. Vyčíslíte přibližně

- (a) $1.02 \cdot 2.03^2$,
- (b) $1.02 \cdot 2.03^2 \cdot 0.98^3$,
- (c) $1.01^{0.98}$,
- (d) $\sin 31^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$,
- (e) $\frac{1.02^3}{\sqrt[4]{0.97\sqrt{1.01}}}$.

Hledání extrémů

7. Nalezněte lokální/globální extrémy funkcí

- (a) $x^2 + (y-1)^2$,
- (b) $x^2 - (y-1)^2$,

- (c) $x^3 + (y - 1)^3$,
- (d) $(x - y + 1)^2$,
- (e) $(x - y + 1)^3$,
- (f) $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,
- (g) $xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x, y > 0$,
- (h) $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,
- (i) $\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$),
- (j) $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, pro $x, y, z \in [0, \pi]$.