1. Označme
$$P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)}.$$
   - Vyjádřete $\binom{2n}{n}$ pomocí P.
   - Ukažte, že
   $$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(2n-5)(2n-3)}{(2n-4)^2} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} \leq 1$$
   a
   $$\frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdots \frac{(2n-4)(2n-2)}{(2n-3)^2} \cdot \frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2} \leq 1.$$
   - Použijte tyto vztahy pro nalezení odhadu velikosti $\binom{2n}{n}$.
2. Pomocí integrálů odhadněte následující sumy:
   - $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   - $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
3. - Víme, že $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq x^n/n!$ pro libovolné n a $x \geq 0$. Nalezněte pomocí tohoto vztahu odhad na $n!$.
   - Vylepšete tento odhad využitím toho, že $e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
   - Nechť $e^{x+x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Víme[1], že $a_k \geq 0$ pro každé k. Nalezněte odhad na a_k.
4. Bez důkazu můžete použít následující nerovnost: pro $0 \leq x \leq 1$ platí $e^{x/2} \leq 1 + x \leq e^x$.
   - Pro dané přirozené číslo n, nechť t je největší přirozené číslo takové, že $e\binom{2n}{n+t} \geq \binom{2n}{n}$. Nalezněte dolní a horní odhad na t.
   - Co z toho plyne pro pravděpodobnost, že náhodně zvolená podmnožina $2n$-prvkové množiny má velikost nanejvýš $n+t$?

[1] Lze odvodit, že $a_k k!$ je počet grafů maximálního stupně 1 s množinou vrcholů $[k]$.