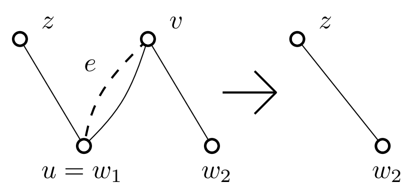


Obrázek 1: Hrana paralelní s e.

Následující tvrzení dokázal Voorhoeve [1]:

Věta 1. *Nechť G je bipartitní 3-regulární graf na $2n$ vrcholech a e je hrana G. Pak G má alespoň $N = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ perfektních párování neobsahujících hranu e.*

Poznamenejme, že v G povolujeme násobné hrany (ale ne smyčky – to by nebyl bipartitní), a že nemáme žádný předpoklad na souvislost G. Nejprve dokažme následující pomocné tvrzení, které spolu s větou 1 implikuje, že bipartitní 3-regulární graf na $2n$ vrcholech má alespoň $\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ perfektních párování:

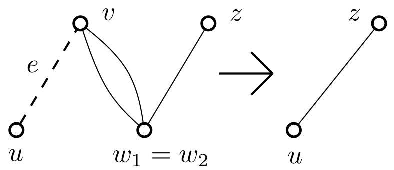
Lemma 2. *Nechť G je bipartitní 3-regulární graf na $2n$ vrcholech takový, že pro každou hranu $e \in E(G)$ má G alespoň N perfektních párování neobsahujících e. Pak G má alespoň $3N/2$ perfektních párování.*

Důkaz. Nechť v je vrchol G a e_1, e_2 a e_3 hrany sousedící s v. Označme P_i množinu všech perfektních párování grafu G, které obsahují hranu e_i, a nahlédněme, že $|P_1| + |P_2| + |P_3|$ je počet všech perfektních párování grafu G. Dále $|P_1| + |P_2|$ je počet perfektních párování grafu G, které neobsahují hranu e_3, a dle předpokladu $|P_1| + |P_2| \geq N$. Obdobně dostáváme $|P_1| + |P_3| \geq N$ a $|P_2|+|P_3| \geq N$. Sečtením těchto nerovností dostaneme $2(|P_1|+|P_2|+|P_3|) \geq 3N$, z čehož plyne požadované tvrzení. $\square$

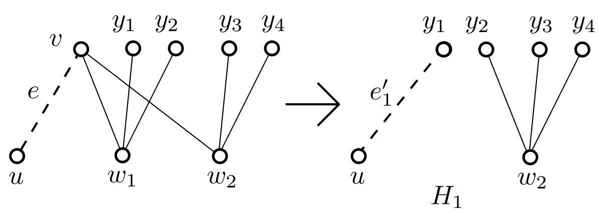
Důkaz věty 1. Tvrzení dokážeme indukcí dle n. Je-li $n = 1$, pak se G skládá z trojnásobné hrany mezi jeho dvěma vrcholy a má 2 perfektní párování neobsahující hranu e, proto tvrzení platí. Nechť $n > 1$.

Jestliže G není souvislý, pak označme G_1 komponentu souvislosti obsahující e a položme $G_2 = G - G_1$. Dle indukčního předpokladu má G_1 alespoň $\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{|V(G_1)|/2}$ perfektních párování neobsahujících e. Je-li f libovolná hrana G_2, pak G_2 má alespoň $\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{|V(G_2)|/2}$ perfektních párování neobsahujících f. Každá kombinace párování v G_1 a v G_2 dává párování v G, proto G má alespoň $\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{|V(G_1)|/2+|V(G_2)|/2} > N$ perfektních párování neobsahujících hranu e.

Předpokládejme nyní, že G je souvislý. Nechť $e = uv$ a u, w_1 a w_2 jsou sousedi v. Jelikož G je souvislý a $|V(G)| \geq 4$, můžeme předpokládat $w_2 \neq u$. Jestliže $w_1 = u$, pak z buď soused u různý od v a H buď graf získaný z $G - \{u, v\}$ přidáním hrany $e' = w_2 z$, viz obr. 1. Nahlédněme, že H je bipartitní 3-regulární graf na $2(n-1)$ vrcholech, a z indukce a lemmatu 2 má H alespoň $\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > N$ perfektních párování. Každé perfektní párování M grafu H odpovídá právě jednomu perfektnímu párování G, které neobsahuje hranu e: Jestliže M obsahuje



Obrázek 2: e sousedí s paralelní hranou



Obrázek 3: Obecný případ

hranu e', pak ji nahradíme hranami w_2v a uz. Jestliže M neobsahuje hranu e', pak přidáme hranu spojující vrcholy u a v různou od e. Proto G má alespoň N perfektních párování neobsahujících e.

Můžeme tedy předpokládat, že $w_1 \neq u$. Jestliže $w_1 = w_2$, pak y buď soused w_1 různý od v a H graf získaný z $G - \{v, w_1\}$ přidáním hrany $e' = uy$, viz obr. 2. Dle indukčního předpokladu má H alespoň $\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > N/2$ perfektních párování neobsahujících hranu e'. Každé takové párování M odpovídá dvěma párováním v G neobsahujícím hranu e (do M přidáme jednu ze dvou hran spojujících v a w_1), proto G má alespoň N perfektních párování neobsahujících e.

Na závěr uvažujme případ, že $w_1 \neq w_2$. Pak $e_1 = w_1y_1$, $e_2 = w_1y_2$ budiž hrany sousedící s w_1 různé od vw_1 a $e_3 = w_2y_3$, $e_4 = w_2y_4$ hrany sousedící s w_2 různé od vw_2. Nechť H_1 je graf získaný z $G - \{v, w_1\}$ přidáním hran $e_1' = uy_1$ a w_2y_2 (viz obr. 3) a H_2 graf vzniklý přidáním hran $e_2' = uy_2$ a w_2y_1. Nechť H_3 je graf získaný z $G - \{v, w_2\}$ přidáním hran $e_3' = uy_3$ a w_1y_4 a H_4 graf vzniklý přidáním hran $e_4' = uy_4$ a w_1y_3. Z indukčního předpokladu má každý z grafů H_i alespoň $3N/4$ perfektních párování, které neobsahují hranu e_i'. Buď P_i množina všech párování grafu G, které neobsahují hranu e a obsahují hranu e_i. Nahlédněme, že množiny P_1, P_2, P_3 a P_4 jsou navzájem disjunktní. Uvažujme párování M grafu H_1, které neobsahuje hranu e_1'. Jestliže M obsahuje hranu y_2w_2, pak M odpovídá párování v P_2, získanému nahrazením hrany y_2w_2 hranami e_2 a vw_2. Obdobně, jestliže M obsahuje e_3, pak odpovídá párování v P_3 a jestliže obsahuje e_4, pak odpovídá párování v P_4. Proto $|P_2| + |P_3| + |P_4| \geq 3N/4$. Uvážíme-li párování v grafech H_2, H_3 a H_4, dostáváme obdobně $|P_1| + |P_3| + |P_4| \geq 3N/4$, $|P_1| + |P_2| + |P_4| \geq 3N/4$ a $|P_1| + |P_2| + |P_3| \geq 3N/4$. Sečtením těchto nerovností dostáváme $3(|P_1| + |P_2| + |P_3| + |P_4|) \geq 3N$, a tedy $|P_1| + |P_2| + |P_3| + |P_4| \geq N$. Nicméně, $|P_1| + |P_2| + |P_3| + |P_4|$ je rovno počtu perfektních párování G neobsahujících hranu e, čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Reference

[1] M. Voorhoeve. A lower bound for the permanents of certain (0, 1)-matrices. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 41(1):83-86, 1979.