Minory v grafech na plochách

Zdeněk Dvořák

24. března 2016

V této kapitole uvažujeme plochy Σ s hranicí $\partial\Sigma$, tj. plochy v nichž je "vyvrtáno" konečně mnoho disjuknetních děr. Sféra s dírou je *disk*.

Definice 1. *Nechť X je množina vrcholů nakreslených na ploše Σ a nechť $\mathcal{P}$ je jejich rozdělení na části. Říkáme, že graf H s $X \subseteq V(H)$* realizuje *$\mathcal{P}$, jestliže $x, y \in X$ jsou ve stejné komponentě H právě když jsou ve stejné části $\mathcal{P}$. Říkáme, že rozdělení $\mathcal{P}$ je* topologicky přípustné*, jestliže nějaký graf H, který ho realizuje, jde nakreslit na Σ (bez přesouvání vrcholů z X).*

Definice 2. *Nechť G je graf nakreslený na ploše Σ.* I-oblouk *je jednoduchá otevřená křivka v Σ protínající G pouze ve vrcholech taková, že oba její konce leží na hranici Σ.* O-oblouk *je jednoduchá uzavřená křivka v Σ protínající G pouze ve vrcholech.*

Nechť G je graf nakreslený na disku Σ, $X \subseteq V(G)$ obsahuje pouze vrcholy nakreslené na hranici, a $\mathcal{P}$ je rozdělení X. I-oblouk c *seká* část $p \in \mathcal{P}$, jestliže c je disjunktní s p a obě komponenty $\Sigma - c$ obsahují vrchol z p.

Lemma 1. *Nechť G je graf nakreslený na disku Σ a $X \subseteq V(G)$ obsahuje pouze vrcholy nakreslené na hranici. Nechť $\mathcal{P}$ je topologicky přípustné rozdělení X. Pak nějaký podgraf G realizuje $\mathcal{P}$ právě tehdy, když každý I-oblouk c seká nejvýše $|c \cap (V(G) \setminus X)|$ částí z $\mathcal{P}$.*

Idea důkazu: Pokud nějaký I-oblouk c seká právě $|c \cap (V(G) \setminus X)|$ částí z $\mathcal{P}$, pak je pro vrcholy $|c \cap (V(G) \setminus X)|$ vynuceno, s kterými vrcholy X musí být v realizaci ve stejné komponentě. Aplikujeme indukci na obě části $\Sigma - c$ (je snadné ověřit, že splňují předpoklady). Jestliže každý I-oblouk c seká méně než $|c \cap (V(G) \setminus X)|$ částí z $\mathcal{P}$, zkontrahujeme hranu G a aplikujeme indukci. $\square$

Nechť Σ je plocha a D je jedna z jejích děr. Množina $B \subseteq \Sigma$ je *kontrahovatelná*, jestliže existuje otevřený disk $\Lambda \subseteq \Sigma$ tž. $B \subseteq \Lambda$. Říkáme, že množina

$B \subseteq \Sigma$ *obklopuje* D, jestliže B není kontrahovatelná v Σ, ale je kontrahovatelná v ploše vzniklé ze Σ zazáplatováním díry D. Množina B je *esenciální*, jestliže B není ani kontrahovatelná, ani neobklopuje díru.

Věta 2. *Pro každé k a plochu Σ existuje η tž. platí následující. Nechť G je graf nakreslený na Σ a $X = V(G) \cap \partial\Sigma$ splňuje $|X| \leq k$. Nechť $\mathcal{P}$ je topologicky přípustné rozdělení X. Jestliže platí následující podmínky, pak nějaký podgraf G realizuje $\mathcal{P}$:*

- *(a) Každý I-oblouk s konci na hranicích různých děr protíná G v alespoň η vrcholech;*
- *(b) pro každý nekontrahovatelný O-oblouk c, který protíná G v méně než η vrcholech, existuje díra D v ploše Σ taková, že c obklopuje D a obsahuje všechny vrcholy G ležící na hranici D;*
- *(c) hranice každé díry obsahuje alespoň dva vrcholy z X; a*
- *(d) Σ má alespoň dvě díry.*

Idea důkazu: Σ "rozstříháme" na disk tak, abychom protnuli co nejméně vrcholů z G, vhodně přeskupíme rozstříhané vrcholy do částí a aplikujeme Lemma 1.

1 Cvičení

Dokažte následující zesílení Věty 2.

Věta 3. *Pro každé k a plochu Σ s alespoň třemi děrami existuje κ tž. platí následující. Nechť G je graf nakreslený na Σ a $X = V(G) \cap \partial\Sigma$ splňuje $|X| \leq k$. Nechť $\mathcal{P}$ je topologicky přípustné rozdělení X. Jestliže platí následující podmínky, pak nějaký podgraf G realizuje $\mathcal{P}$:*

- *(a) Každá souvislá esenciální množina, která protíná G pouze ve vrcholech, má alespoň κ průsečíků s G;*
- *(b) každý O-oblouk c, který obklopuje díru D, protíná G v alespoň tolika vrcholech, kolik je vrcholů z X na hranici D; a*
- *(c) hranice každé díry obsahuje alespoň dva vrcholy z X.*

Návod: nechť η je konstanta z Věty 2 pro k a Σ. Zafixujme nějak $\kappa \gg \alpha \gg \eta \gg k$. Nechť c je O-oblouk obíhající díru D; jakožto $G\{c\}$ označme podgraf G skládající se z vrcholů a hran nakreslených mezi D a c (včetně). Pro každou díru D zvolme O-oblouk c_D který ji obklopuje, protíná G v nejvýše α vrcholech, a $G\{c_D\}$ je maximální.

1. Pro díry $D_1 \neq D_2$ jsou $G\{c_{D_1}\}$ a $G\{c_{D_2}\}$ disjunktní; navíc neexistuje jednoduchá otevřená křivka q v Σ protínající G jen ve vrcholech, tž. jeden konec q je v $G\{c_{D_1}\}$, druhý v $G\{c_{D_2}\}$, a q protíná G v méně než α vrcholech.

2. Pro díru D existuje $\alpha/10$ disjunktních kružnic $C_{D,1}, \dots, C_{D,\alpha/10} \subseteq G$ tž. každá z nich obklopuje D a je disjunktní s $G\{c_D\}$, a pro $i < j$ platí $C_{D,i} \subset G\{C_{D,j}\}$. Navíc lze tyto kružnice zvolit tak, že pro $D_1 \neq D_2$ jsou $G\{C_{D_1,\alpha/10}\}$ a $G\{C_{D_2,\alpha/10}\}$ disjunktní.

3. Pro díru D označme $A_D = C_{D,1}$, $B_D = C_{D,\alpha/20}$ a $Z_D = C_{D,\alpha/10}$. Pak v $G\{Z_D\}$ existuje α disujunktních cest $P_1, \dots, P_\alpha$ z A_D do Z_D, a je-li ∂D hranice D, pak v $G\{Z_D\}$ existuje $|X \cap \partial D|$ vrcholově disjunktních cest z $X \cap \partial D$ do Z_D.

4. Cesty $P_1, \dots, P_\alpha$ a kružnice $C_{D,1}, \dots, C_{D,\alpha/10}$ lze zvolit tak, aby každá cesta P_j protínala každou z kružnic $C_{D,i}$ v souvislé podcestě.

5. Rozdělme B_D na $|X \cap \partial D|$ úseků, z nichž každý protíná alespoň α/k cest $P_1, \dots, P_\alpha$. Zkontrahujme každý z těchto úseků do vrcholu, a nechť B'_D je kružnice délky $|X \cap \partial D|$ takto vzniklá z B_D. Nechť G' je graf vzniklý provedením této kontrakce u každé díry ze Σ. Pak v $G'\{B'_D\}$ existuje $|X \cap \partial D|$ vrcholově disjunktních cest z $X \cap \partial D$ do B'_D.

6. Nechť G'' je podgraf G' vzniklý odebráním vrcholů a hran mezi D a B'_D pro každou díru D, a rozšířením této díry tak, aby obsahovala vrcholy B'_D. Pak G'' splňuje předpoklady Věty 2.