Věta o mřížce

Zdeněk Dvořák

14. března 2016

Naším cílem je ukázat, že existuje-li v grafu G tangle $\mathcal{T}$ velkého řádu, pak v něm je i velká $r \times r$ mřížka M_r jako minor. Navíc bychom chtěli, aby tangle $\mathcal{T}$ byla "konzistentní" s tanglí odvozené od této mřížky. Vrchol mřížky M_r v i-tém řádku a j-tém sloupci označme jako m_{ij}, a řádky a sloupce jako $m_{i\star}$ and $m_{\star j}$.

1 Pomocná tvrzení

Lemma 1. *Je-li T strom s $\Delta(T) \le 3$ a $X \subseteq V(T)$ má velikost alespoň k, pak existuje les $F \subseteq T$ s $X \subseteq V(F)$ tž. každá komponenta F obsahuje alespoň k a nejvýše $3k-2$ vrcholů z X.*

Důkaz. Na začátku položme $F = T$. Z F budeme postupně odebírat hrany tak, aby vždy platilo, že každá komponenta F obsahuje alespoň k vrcholů z X.

Jestliže nějaká komponenta C obsahuje alespoň $3k-1$ vrcholů z X, zakořeňme C v listu a zvolme $v \in V(C)$ tak, aby podstrom T_v pod v obsahoval alespoň k vrcholů z X a T_v bylo s touto vlastností minimální. Vrchol v má nejvýše dva syny a z minimality T_v dostáváme $|X \cap V(T_v)| \le 2k-1$, a tedy $|X \setminus V(T_v)| \ge k$. Z F můžeme odebrat hranu mezi v a jeho otcem v C.

Toto opakujeme, dokud neplatí podmínka, že každá komponenta F obsahuje nejvýše $3k-2$ vrcholů z X. $\square$

Nechť $v_1, \ldots, v_r$ jsou hranově disjunktní vrcholy grafu H. Říkáme, že r-tice $(v_1, \ldots, v_r)$ je *cestoidní* v H, jestliže pro $i = 1, \ldots, r-1$ v G existuje cesta z v_i to v_{i+1} neobsahující $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+2}, \ldots, v_r$.

Lemma 2. *Nechť $X \subseteq V(H)$ má velikost větší než $(r-1)^2$. Je-li H souvislý, pak existuje cestoidní r-tice vrcholů z X.*

Důkaz. Nechť T_0 je kostra H a nechť T je minimální podstrom T_0 obsahující X; každý list T tedy leží v X. Každá posloupnost listů T je cestoidní v T a tedy i v H, proto můžeme předpokládat, že T má nejvýše $r-1$ listů. Zvolme vrchol $v \in V(T)$ libovolně. Strom T je sjednocením cest z v do listů, a jelikož T má nejvýše $r-1$ listů a $|X| > (r-1)^2$, existuje taková cesta P obsahující alespoň r vrcholů z X. Pak r-tice vrcholů z $V(P) \cap X$ uspořádaná dle jejich pořadí na P je cestoidní v T, a proto i v H. □

Lemma 3. *Nechť H je bipartitní graf s partitami A a B. Nechť $c \geq 4b$ a $|B| \geq 2b$. Je-li $|E(H)| \geq (1-1/c)|A||B|$, pak existují $A' \subseteq A$ a $B' \subseteq B$ tž. $|A'| \geq |A|/2$, $|B'| = b$ a $H[A' \cup B']$ je úplný bipartitní graf.*

Důkaz. Graf H obsahuje nejvýše $\frac{|A||B|}{c} \leq \frac{|A||B|}{4b}$ nehran mezi A a B; méně než $|B|/2$ vrcholů z B tedy má více než $\frac{|A|}{2b}$ nesousedů v A. Jelikož $|B|/2 \geq b$, existuje b vrcholů z B, které mají nejvýše $\frac{|A|}{2b}$ nesousedů v A. Zvolme si tyto vrcholy jako B'. Existuje nejvýše $b\frac{|A|}{2b} = |A|/2$ vrcholů v A majících nesouseda v B', můžeme tedy z A vybrat alespoň $|A|/2$ vrcholů úplných k B'. □

2 Konstrukce mřížek

Propojení je množina disjunktních cest. Nechť $\mathcal{H}$ a $\mathcal{C}$ jsou propojení. Jestliže každá cesta z $\mathcal{H}$ protíná každou cestu z $\mathcal{C}$, pak $\mathcal{H}$ a $\mathcal{C}$ tvoří *síť*. Jestliže navíc existuje uspořádání $C_1, \ldots, C_n$ cest z $\mathcal{C}$ takové, že pro každou cesty $H \in \mathcal{H}$ a pro každé $j < j'$ jsou všechny vrcholy $C_j \cap H$ před všemi vrcholy $C_{j'} \cap H$ na cestě H, říkame, že síť je *uspořádaná*.

Lemma 4. *Pro každé r existuje n tž. platí následující. Je-li $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_{r^2-1}\}$ a $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ uspořáhaná síť v grafu G, pak existují navzájem různé indexy $p_1, \ldots, p_r$ a model η mřížky M_r v G tž. pro $1 \leq i, j \leq r$ protíná cesta H_{p_i} podgraf $\eta(m_{ij})$.*

Důkaz. Pro $j = 1, \ldots, n$ si jako F_j označme pomocný graf s vrcholy $\{1, \ldots, r^2-1\}$, kde ii' je hrana právě tehdy, když C_j obsahuje podcestu spojující H_i s $H_{i'}$ a neprotínající žádnou jinou z cest $H_1, \ldots, H_{r^2-1}$. Graf F_j je souvislý, a dle Lemma 2 v něm existuje cestoidní r-tice. Jelikož $n \gg r^2$, existuje jedna r-tice $W = (p_1, \ldots, p_r)$ a množina Z obsahující r^2 indexů j takových, že W je cestoidní v F_j. Pak $H_{p_1}, \ldots, H_{p_r}$ použijeme jako řádky mřížky, a podcesty V_j pro $j \in Z$ nám dávají svislé hrany mřížky. □

Nechť $\mathcal{H}$ je propojení v grafu G, nechť A a B jsou disjunktní podmnožiny $V(G)$, a nechť F je podgraf G. Propojení $\mathcal{H}$ je (A, B)-*propojení*, jestliže každá cesta z $\mathcal{H}$ má začátek v A a konec v B. Dále, (A,B)-propojení $\mathcal{H}$ je *minimální vůči* F, jestliže pro každou hranu $e \in E(\bigcup \mathcal{H}) \setminus E(F)$ platí, že v $F \cup \bigcup \mathcal{H} - e$ neexistuje (A,B)-propojení velikosti $|\mathcal{H}|$.

Pozorování 5. *Nechť $\mathcal{H}_0$ je (A,B)-propojení v G a F je podgraf G. Pak v G existuje (A,B)-propojení $\mathcal{H}$ velikosti $|\mathcal{H}_0|$, které je minimální vůči F, a $\bigcup \mathcal{H} \subseteq F \cup \bigcup \mathcal{H}_0$.*

Lemma 6. *Nechť $2 \le p \le n$ jsou přirozená čísla a $n_1 \ge 2pn^2$. Nechť $\mathcal{H}_1$ je (A,B)-propojení v grafu G velikosti p a $\mathcal{C}_1$ je propojení v G tž. $\mathcal{H}_1$ je minimální vůči $\bigcup \mathcal{C}_1$. Nechť $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1$ a $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_1$ je síť v G, kde $|\mathcal{C}_0| \ge n_1$. Nechť $H_0 \in \mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \setminus \{H_0\}$. Pak existuje $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_0$ velikosti n tž. $\mathcal{H}$ a $\mathcal{C}$ tvoří uspořádanou síť.*

Důkaz. Můžeme zvolit hrany $e_0, \ldots, e_n \in E(H_0) \setminus E(\bigcup \mathcal{C}_1)$ uspořádané dle jejich pořadí na H_0 tž. pro $i = 1, \ldots, n$ existuje alespoň pn cest z $\mathcal{C}_0$, které protínají H_0 mezi e_{i-1} a e_i a neprotínají H_0 před e_{i-1}. Jelikož $\mathcal{H}_1$ je (A,B)-minimální propojení vůči $\bigcup \mathcal{C}_1$, pro $i = 0, \ldots, n$ existuje z Mengerovy věty množina S_i velikosti nejvýše $p-1$ tž. S_i a e_i oddělují A od B v $\bigcup \mathcal{H}_1 \cup \bigcup \mathcal{C}_1$. Zjevně S_i obsahuje jeden vrchol z každé cesty $\mathcal{H}_1 \setminus \{H_0\}$, a proto $|S_i| = p-1$. Nechť $S = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$; máme $|S| \le (p-1)(n+1) < pn$, a proto pro $i = 1, \ldots, n$ existuje cesta $C_i \in \mathcal{C}_0$ disjunktní s S, která protíná H_0 mezi e_{i-1} a e_i a neprotíná H_0 před e_{i-1}. Pak můžeme položit $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$; ověřme, že síť $\mathcal{H}, \mathcal{C}$ je uspořádaná.

Nechť $H \in \mathcal{H}$ a $s_0, \ldots, s_n$ jsou vrcholy $S_0 \cap H, \ldots, S_n \cap H$. Stačí ukázat, že C_i protíná H pouze před s_i a za s_{i-1}. Kdyby C_i protnula H před s_{i-1}, pak začátek $H - s_{i-1}$, úsek C_i a konec $H_0 - e_{i-1}$ tvoří cestu z A do B v $\bigcup \mathcal{H}_1 \cup \bigcup \mathcal{C}_1 - e_{i-1} - S_{i-1}$. Kdyby C_i protnula H za s_i, pak začátek $H_0 - e_i$, úsek C_i a konec $H - s_i$ tvoří cestu z A do B v $\bigcup \mathcal{H}_1 \cup \bigcup \mathcal{C}_1 - e_i - S_i$. V obou případech dostáváme spor. $\square$

Důsledek 7. *Pro každé r existuje c tž. platí následující. Nechť G je graf, nechť $\mathcal{H}_1$ je (A,B)-propojení v G velikosti $p \ge 2r^2$ a $\mathcal{C}_1$ je propojení v G takové, že alespoň cp cest z $\mathcal{C}_1$ je disjunktní s nejvýše $|\mathcal{H}_1|/c$ cestami z $\mathcal{H}_1$. Jestliže (A,B)-propojení $\mathcal{H}_1$ je minimální vůči $\bigcup \mathcal{C}_1$, pak existuje (A,B)-propojení $\{H_1, \ldots, H_r\} \subseteq \mathcal{H}_1$ a model η mřížky M_r v G tž. pro $1 \le i,j \le r$ protíná cesta H_i podgraf $\eta(m_{ij})$.*

Důkaz. Nechť n je jako v Lemma 4 a $c = 4n^2$. Dle Lemma 3 lze vybrat $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1$ velikosti r^2 a $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_1$ velikosti $cp/2 = 2pn^2$ tž. $\mathcal{H}_0, \mathcal{C}_0$ je síť. Dle Lemma 6 existuje (A,B)-propojení $\mathcal{H}$ velikosti $r^2 - 1$ a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_0$ velikosti n tž. $\mathcal{H}$ a $\mathcal{C}$ tvoří uspořádanou síť. Tvrzení pak plyne z Lemma 4. $\square$

3 Tangle a linkované množiny

Připomeňme, že *rank* $\mathrm{rk}(X)$ množiny vrcholů X vůči tangli $\mathcal{T}$ řádu θ je nejmenší velikost separace $(C,D) \in \mathcal{T}$ tž. $X \subseteq V(C)$, nebo θ jestliže žádná taková separace velikosti menší než θ neexistuje; a že rk definuje matroid. Množina X je *svobodná*, jestliže $\mathrm{rk}(X) = |X|$. Z definice matroidu plyne, že každá podmnožina svobodné množiny je svobodná.

Lemma 8. *Nechť $\mathcal{T}$ je tangle řádu θ v grafu G, a nechť X a Y jsou (ne nutně disjunktní) množiny vrcholů v G tž. Y je svobodná a v G existuje (X,Y)-propojení $\mathcal{P}$ velikosti $|X|$. Pak $rk(X) \geq |X|/2$.*

Důkaz. Kdyby $\mathrm{rk}(X) < |X|/2$, pak existuje $(C,D) \in \mathcal{T}$ velikosti $k < |X|/2$ tž. $X \subseteq V(C)$. Nejvýše k cest z $\mathcal{P}$ protíná $V(C \cap D)$, a proto alespoň $|X| - k > |X|/2 > k$ vrcholů z Y leží v C. To je ale spor, jelikož každá podmnožina Y je svobodná. □

Nechť B je graf. Množina $X \subseteq V(B)$ je *vnějškově linkovaná*, jesliže pro každé disjunktní $S_1, S_2 \subset X$ stejné velikosti k existuje v $B - (X \setminus (S_1 \cup S_2))$ k vrcholově disjunktních cest z S_1 do S_2. Strom T je *X-konektor*, jestliže $\Delta(T) \leq 3$ a každý vrchol X patří do T a má stupeň nejvýše 2 v T. Separace (A,B) je *podstavec*, jestliže označíme-li $X = V(A \cap B)$, pak A obsahuje X-konektor T a v každé komponentě $B - X$ je vrchol sousedící s listem T v X.

Lemma 9. *Nechť $\mathcal{T}$ je tangle řádu $\theta \geq 2$ v grafu G. Pak existuje podstavec $(A,B) \in \mathcal{T}$.*

Důkaz. Zjevně G má komponentu G_0 takovou, že $(G - G_0, G_0) \in \mathcal{T}$. Nechť v je libovolný vrchol G_0, $A = G - (V(G_0) \setminus \{v\})$ a $B = G_0$. Pak (A,B) je podstavec. □

Nechť G je graf a U a W disjunktní podmnožiny jeho vrcholů. Pak jako $G[U,W]$ označme podgraf G s vrcholy $U \cup W$ a právě všemi hranami G, které mají alespoň jeden konec v W.

Lemma 10. *Nechť $\mathcal{T}$ je tangle sudého řádu $\theta \geq 3$ v grafu G a (A,B) je podstavec splňující $(A,B) \in \mathcal{T}$ a $|V(A \cap B)| < \theta$ takový, že A je maximální. Označíme-li $X = V(A \cap B)$, pak $|X| = \theta - 1$, X je vnějškově linkovaná v B a $rk(X) \geq \theta/2$.*

Důkaz. Jestliže $B - X$ není souvislý graf, pak má právě jednu komponentu K tž. označíme-li $A' = G - K$ a $B' = G[X, V(K)]$, pak $(A', B') \in \mathcal{T}$. Pak ale (A', B') je podstavec a $A \subsetneq A'$, což je ve sporu s maximalitou A. Proto $B - X$

je souvislý graf. Obdobně X je nezávislá množina v B, tj. A je indukovaný podgraf G.

Nechť T je X-konektor v A. Kdyby $|X| < \theta - 1$, nechť v je vrchol $B - X$, který sousedí s listem u stromu T, a nechť $A' = G[V(A) \cup \{v\}]$, $X' = X \cup \{v\}$ a $B' = G[X', V(B) \setminus X']$. Zjevně $(A', B') \in \mathcal{T}$. Dále $T' = T + uv$ je X'-konektor v A' s listem v, a jelikož $B - X$ je souvislý graf, každá komponenta $B' - X'$ obsahuje souseda vrcholu v. Jelikož $A \subset A'$ a $v \in V(A') \setminus V(A)$, dostáváme spor s minimalitou A. Proto $|X| = \theta - 1$.

Kdyby X nebyla vnějškově linkovaná v B, pak z Mengerovy věty existuje separace (C, D) grafu B taková, že $|X \setminus V(C)| = |X \setminus V(D)| > |V(C \cap D - X)|$ a B obsahuje $(X \setminus V(C), X \setminus V(D))$-propojení $\mathcal{P}$ velikosti $|V(C \cap D - X)|$, jehož cesty neprotínají $X \cap V(C \cap D)$. Separace $(A \cup C, D)$ má velikost $|X \setminus V(C)| + |V(C \cap D)| = |X \setminus V(C)| + |X \cap V(C \cap D)| + |V(C \cap D - X)| < |X \setminus V(C)| + |X \cap V(C \cap D)| + |X \setminus V(D)| = |X| = \theta - 1$, a obdobně separace $(A \cup D, C)$ má velikost menší než $\theta - 1$. Proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $(A \cup C, D) \in \mathcal{T}$. Nechť $X' = V((A \cup C) \cap D)$ a nechť T' je strom v $A \cup C$ vzniklý z T připojením částí cest $\mathcal{P}$ mezi $X \setminus V(D)$ a $V(C \cap D - X)$. Pak T' je X'-konektor v $A \cup C$ a každý vrchol $V(C \cap D - X)$ je jeho list. Navíc, jelikož $B - X$ je souvislý graf, každá komponenta D sousedí s vrcholem $V(C \cap D - X)$. Proto $(A \cup C, D)$ je podstavec, ve sporu s maximalitou A. Dostáváme tedy, že X je vnějškově linkovaná v B.

Jelikož $(A, B) \in \mathcal{T}$, máme $\mathrm{rk}(V(B)) = \theta$, a jelikož rk definuje matroid, existuje svobodná $Y \subseteq V(B)$ velikosti θ. Abychom ukázali, že $\mathrm{rk}(X) \geq \theta/2$, dle Lemma 8 stačí najít (X, Y)-propojení v B velikosti $|X|$. Kdyby neexistovalo, dle Mengerovy věty má nejmenší separace (C, D) grafu B tž. $X \subseteq V(C)$ a $Y \subseteq V(D)$ velikost $k < |X| = \theta - 1$, a v B existuje $(X, V(C \cap D))$-propojení $\mathcal{P}$ velikosti k. Separace $(A \cup C, D)$ grafu G má stejnou velikost k. Jelikož $\mathrm{rk}(Y) = \theta$, dostáváme $(D, A \cup C) \notin \mathcal{T}$, a proto $(A \cup C, D) \in \mathcal{T}$. Označme $X' = V(C \cap D)$. Jelikož $B - X$ je souvislý, každá komponenta $D - V(C)$ má souseda v $X' \setminus X$. Proto $T' = T \cup \bigcup \mathcal{P}$ je X'-konektor v $A \cup C$ ukazující, že $(A \cup C, D)$ je podstavec, ve sporu s maximalitou A. $\square$

4 Hlavní věta

Lemma 11. *Pro každé r existuje sudé θ tž. platí následující. Nechť (A, B) je separace G, $X = V(A \cap B)$ je vnějškově linkovaná v B, v A existuje X-konektor T a $X' \subseteq X$ má velikost $\theta/2$. Pak existuje model η mřížky M_r v G takový, že buď*

(a) existují v B vrcholově disjunktní cesty $H_1, \ldots, H_r$ s oběma konci v X' tž. $\eta(m_{ij})$ protíná H_i pro $1 \leq i, j \leq r$, nebo

(b) $\eta(m_{ij})$ obsahuje vrchol X' pro $1 \leq i, j \leq r$.

Důkaz. Zvolíme vhodně $\theta \gg k \gg c \gg r$, kde k je mocnina c^2r^4. Dle Lemma 1 existuje les $F \subseteq T$ s alespoň r^2 komponentami, z nichž každá obsahuje alespoň k vrcholů z X'. Nechť F_i pro $1 \leq i \leq r^2$ jsou komponenty F, a $X_i = V(F_i) \cap X'$. Dle vnějškové linkovanosti X v B existuje pro každé $i < j$ (X_i, X_j)-propojení $\mathcal{P}_{ij}$ velikosti k v G, kde vnitřní vrcholy cest nejsou obsaženy v X. Postupně procházíme dvojice indexů $1 \leq i < j \leq r^2$, a pro každý z nich provedeme následující: z každé množiny $\mathcal{P}_{i'j'}$ s $i'j' > ij$ zahodíme všechny cesty až na jednu cr^4-tinu (tj. po této operaci $|\mathcal{P}_{ij}| = cr^4|\mathcal{P}_{i'j'}|$) a dle Pozorování 5 je nahradíme takovými cestami, aby $\mathcal{P}_{i'j'}$ bylo minimální $(X_{i'}, X_{j'})$-propojení vůči $\bigcup \mathcal{P}_{ij}$. Jestliže existuje cesta $P_{ij} \in \mathcal{P}_{ij}$, která je pro každé $i'j' > ij$ disjunktní s alespoň $\frac{1}{c}|\mathcal{P}_{i'j'}|$ cestami z $\mathcal{P}_{i'j'}$, pak tuto cestu P_{ij} zafixujeme, z každé množiny $\mathcal{P}_{i'j'}$ zahodíme všechny cesty až na jednu c-tinu tak, aby zbylé cesty byly disjunktní s P_{ij}, a pokračujeme v konstrukci.

Pokud takto zpracujeme všechny indexy, dostáváme model M_r (dokonce K_{r^2}) v G splňující podmínku (b) přidáním vybraných cest P_{ij} ke stromům F_i. Jinak pro nějaké ij a pro každou cestu $P \in \mathcal{P}_{ij}$ existuje $i'j' > ij$ tž. P je disjunktní s méně než $|\mathcal{P}_{i'j'}|/c$ cestami z $\mathcal{P}_{i'j'}$. Zafixujme $i'j'$ takové, že $\mathcal{P}_{ij}$ obsahuje podmnožinu alespoň $|\mathcal{P}_{ij}|/r^4 = c|\mathcal{P}_{i'j'}|$ cest disjunktních s méně než $|\mathcal{P}_{i'j'}|/c$ cestami z $\mathcal{P}_{i'j'}$. Dle Důsledku 7 existuje v G model M_r splňující podmínku (a). $\square$

Věta 12. *Pro každé r existuje sudé θ tž. platí následující. Je-li $\mathcal{T}$ tangle řádu θ v G, pak existuje model η mřížky M_r v G tž. pro každou separaci (C, D) velikosti menší než r platí $(C, D) \in \mathcal{T}$ právě tehdy, když existuje i tž. $\eta(m_{i\star}) \subseteq D$.*

Důkaz. Nechť (A, B) je podstavec splňující $(A, B) \in \mathcal{T}$ a $|V(A \cap B)| < \theta$ takový, že A je maximální (nějaký podstavec v $\mathcal{T}$ velikosti menší než θ existuje dle Lemma 9). Položme $X = V(A \cap B)$. Dle Lemmat 10 a 11 existuje model η mřížky M_r v G splňující (a) nebo (b) z Lemma 11, kde $X' \subseteq X$ splňuje $|X'| = \mathrm{rk}(X') = \theta/2$.

Uvažme libovolnou separaci $(C, D) \in \mathcal{T}$ velikosti menší než r. Pak existuje i tž. $\eta(m_{i\star})$ je disjunktní s $C \cap D$, a proto buď $\eta(m_{i\star}) \subseteq C - V(D)$ nebo $\eta(m_{i\star}) \subseteq D - V(C)$. Pro spor předpokládejme, že $\eta(m_{i\star}) \subseteq C - V(D)$. Když η splňuje (b), dostáváme $|V(C) \cap X'| \geq r$. Co kdyby η splňovalo (b)? Existuje j tž. $\eta(m_{\star j})$ je disjunktní s $C \cap D$, a protože $\eta(m_{i\star})$ protíná $\eta(m_{\star j})$, dostáváme $\eta(m_{\star j}) \subseteq C - V(D)$. Speciálně pro každé i' je $\eta(m_{i'j}) \subseteq C \setminus V(D)$, a tedy $H_{i'}$ obsahuje vrchol $C - V(D)$. Počet konců $H_{i'}$ v $D - V(C)$ je tedy menší nebo roven počtu průsečíků $H_{i'}$ s $V(C \cap D)$, a jelikož pro $1 \leq i' \leq r$ oba konce $H_{i'}$ leží v X', dostáváme opět $|V(C) \cap X'| \geq 2r - |V(C \cap D)| \geq r$.

Nicméně $|X'| = \mathrm{rk}(X')$, a proto $\mathrm{rk}(V(C) \cap X') = |V(C) \cap X'| \geq r$ je větší než velikost (C, D), což je spor.

Naopak, nechť (C, D) je separace velikosti menší než r a $\eta(m_{i\star}) \subseteq D$. Pro spor předpokládejme, že $(C, D) \notin \mathcal{T}$, a proto $(D, C) \in \mathcal{T}$. Dle předchozího odstavce existuje i' tž. $\eta(m_{i' star}) \subseteq C$. Pak ale $\eta(m_{\star j})$ protíná C i D pro každé j, ve sporu s $|V(C \cap D)| < r$. $\square$