Připomenutí

Definice 1 *Nechť graf G je nakreslený na ploše Σ a má tangli $\mathcal{T}$ řádu θ. Pak $\mathcal{T}$* respektuje *Σ, jestliže pro každou jednoduchou uzavřenou křivku c v Σ existuje uzavřený disk Δ s hranicí rovnou c tž. $(G \cap \Delta, G \cap \overline{\Sigma - \Delta}) \in \mathcal{T}$. Definujeme $ins_{\mathcal{T}}(c) = \Delta$.*

Definice 2 Radiální graf *$R(G)$ ke grafu G nakreslenému na ploše Σ je graf s vrcholy $V(G) \cup F(G)$ a hranami $\{vf : v \in V(G), f \in F(G), v$ je incidentní s $f\}$, kde $R(G)$ je nakreslený ja Σ zřejmým způsobem.*

Definice 3 *Nechť graf G je nakreslený na ploše Σ. Funkce ins, která každému cyklu C délky $< 2\theta$ v $R(G)$ přiřadí disk $ins(C) \subseteq \Sigma$ s hranicí rovnou C, je* svah řádu θ*, jestliže*

(S1) pro každé dva cykly $C_1, C_2 \subseteq R(G)$ délky $< 2\theta$, jestliže $C_1 \subseteq ins(C_2)$, pak $ins(C_1) \subseteq ins(C_2)$, a

(S2) pro každé tři cesty $P_1, P_2, P_3 \subseteq R(G)$ protínající se pouze v koncových vrcholech takové, že sjednocení každých dvou z nich má délku $< 2\theta$, jeden z disků $ins(P_1P_2)$, $ins(P_1P_3)$ a $ins(P_2P_3)$ obsahuje ostatní dva.

Svah je hladký*, jestliže pro každou stěnu $f \in F(R(G))$ existuje cyklus $C \subseteq R(G)$ délky $< 2\theta$ tž. $f \subseteq ins(F(R(G)))$.*

Nechť ins je svah řádu θ v $R(G)$. Pro $H \subseteq R(G)$, který neobsahuje cykly délky alespoň 2θ, definujme

$$\operatorname{ins}(H) = H \cup \bigcup_{C \text{ cyklus v } H} \operatorname{ins}(C).$$

Pro $X \subseteq F(R(G))$ buď $N(X)$ podgraf $R(G)$ skládající se z hran a vrcholů sousedících jak se stěnou v X, tak mimo X. Hrany G ztotožňujme s odpovídajícími stěnami $R(G)$, je-li tedy A podgraf G, pak $E(A)$ chápejme jako množinu stěn $R(G)$. Položme

$$\mathcal{T}_{\text{ins}} = \{(A, B) \text{ separace } G \text{ velikosti } < \theta \text{ tž. } E(A) \subseteq \operatorname{ins}(N(E(A)))\}.$$

Věta 1 *Nechť graf G je nakreslený na ploše Σ.*

- *Jestliže tangle $\mathcal{T}$ řádu θ v G respektuje Σ, pak $ins_{\mathcal{T}}$ je hladký svah řádu θ a $\mathcal{T}_{ins_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$.*
- *Jestliže ins je hladký svah řádu θ, pak $\mathcal{T}_{ins}$ je tangle řádu θ respektující Σ a $ins_{\mathcal{T}_{ins}} = ins$.*

Nové definice

Nechť graf G je nakreslený na ploše Σ, $\mathcal{T}$ je tangle řádu θ v G respektující Σ a ins je odpovídající svah. *Atom* je vrchol, hrana nebo stěna. Nechť W je uzavřený tah v $R(G)$ a H_W je podgraf $R(G)$ skládající se z vrcholů a hran W. Jestliže W má délku menší než 2θ, pak říkáme, že W je *krátký* a definujeme $\mathrm{ins}(W) = \mathrm{ins}(H_W)$. Pro každé dva atomy a a b v $R(G)$ definujme

- $d(a, b) = 0$ jestliže $a = b$,
- $d(a, b) = \frac{1}{2} \cdot$ nejmenší délka krátkého tahu W v $R(G)$ tž. $a, b \subseteq \mathrm{ins}(W)$ jestliže $a \neq b$ a takový tah existuje, a
- $d(a, b) = \theta$ jestliže $a \neq b$ a takový tah neexistuje.

Pro atomy a, b grafu G definujeme $d(a, b) = d(a', b')$, kde a', b' jsou odpovídající atomy (vrcholy nebo stěny) $R(G)$.

Tah W je *primitivní*, jestliže H_W je jedno z následujících: cesta; cyklus; sjednocení dvou kružnic protínajících se v právě jednom vrcholu; sjednocení dvou disjunktních kružnic a cesty protínající tyto kružnice právě ve svých koncích; nebo kružnice a cesta, která ji protíná jen ve svém konci.

Úlohy

- Jestliže a a b jsou atomy $R(H)$ a $0 < d(a, b) < \theta$, pak existuje *primitivní* uzavřený tah W délky $2d(a, b)$ s $a, b \subseteq \mathrm{ins}(W)$.
- d je metrika, tedy pro všechny atomy a, b, c (G nebo $R(G)$) platí $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$.
- Jestliže a a b jsou hrany souvislého grafu G a $d(a, b) \geq 2k + 3$, pak existuje hrana c grafu G tž. $d(a, c) \geq k$ a $d(b, c) \geq k$.