**Definice 1** *Nechť $k \geq 2$ a $\theta \geq 1$ jsou přirozená čísla. Pak $k$-tangle řádu $\theta$ v grafu $G$ je množina $\mathcal{S}$ separací $G$, jejichž velikost je menší než $\theta$, tž.*

*(T1) Je-li $(A, B)$ separace $G$ velikosti menší než $\theta$, pak buď $(A, B)$ nebo $(B, A)$ patří do $\mathcal{S}$.*

*(T2k) Je-li $(A_1, B_1), \ldots, (A_k, B_k) \in \mathcal{S}$, pak $A_1 \cup \ldots \cup A_k \neq G$.*

*(T3) Je-li $(A, B) \in \mathcal{S}$, pak $V(A) \neq V(G)$.*

Normální tangle je tedy 3-tangle.

1. Ukažte, že je-li $k_1 \geq k_2$, pak každá $k_1$-tangle je také $k_2$ tangle.
2. Ukažte, že má-li $G$ 3-tangli řádu $\theta$, pak také má $k$-tangli řádu alespoň $\theta/k$ pro každé $k \geq 4$.
3. Ukažte, že $G$ má tangli řádu 3 právě tehdy, když $G$ obsahuje $K_4$ jako minor.
4. Pro každé $\theta \geq 1$ nalezněte graf $G$ takový, že $G$ má 2-tangli řádu $\theta$, ale nemá 3-tangli řádu 3.
5. Ukažte, že tangle řádu 2 přesně odpovídají 2-souvislým blokům v $G$.
6. Nechť $G$ je graf nakreslený v rovině, který má tangli $\mathcal{T}$ řádu $\theta \geq 2$. Pro každou uzavřenou křivku $c$ v rovině, která protíná nakreslení $G$ pouze ve vrcholech, označme $(A_c, B_c)$ separaci $G$ takovou, že $V(A_c)$ se skládá z vrcholů nakreslených na $c$ nebo vně $c$, $V(B_c)$ z vrcholů nakreslených na $c$ nebo uvnitř $c$ a $E(A_c)$ z hran nakreslených vně $c$. Zvolme $c$ tak, že $(A_c, B_c) \in \mathcal{T}$ a $A_c$ je maximální na inkluzi s touto vlastností.
   - Ukažte, že $c$ protíná $G$ v právě $\theta - 1$ vrcholech.
   - Označme $X$ vrcholy $G$ nakreslené na $c$. Nechť $C$ a $D$ jsou dvě disjunktní podmnožiny $X$. Dokažte, že $B_c$ obsahuje $\min(|C|, |D|)$ vrcholově disjunktních cest s jedním koncem v $C$ a druhým v $D$.
   - Dokažte, že $\theta \leq 4\sqrt{|V(G)|} + 4$.
   - Dokažte, že každý rovinný graf na $n$ vrcholech obsahuje vyvážený separátor velikosti $O(\sqrt{n})$.