

Stromové rozklady

Zdeněk Dvořák

2. listopadu 2016

Definice 1. Stromový rozklad grafu G je dvojice (T, β) taková, že

- T je strom,
- β je funkce přiřazující každému vrcholu T podmnožinu vrcholů v G ,
- pro každé $v \in V(G)$ existuje $x \in V(T)$ tž. $v \in \beta(x)$,
- pro každé $uv \in E(G)$ existuje $x \in V(T)$ tž. $u, v \in \beta(x)$, a
- pro každé $v \in V(G)$ indukuje $\{x \in V(T) : v \in \beta(x)\}$ souvislý podstrom T .

Lemma 1. Je-li (T, β) stromový rozklad grafu G a je-li H souvislý podgraf G , pak $\{x \in V(T) : V(H) \cap \beta(x) \neq \emptyset\}$ indukuje souvislý podstrom T_H stromu T .

Důkaz. Indukcí dle $|V(H)|$. Pro $|V(H)| = 1$ platí z definice stromového rozkladu. Jestliže $|V(H)| > 1$, pak existuje $v \in V(H)$ tž. $H - v$ je souvislý (např. libovolný list kostry H). Nechť u je soused v v H .

Z indukčního předpokladu je T_{H-v} souvislý podstrom T . Dle definice stromového rozkladu je T_v souvislý podstrom. Navíc $T_{H-v} \cap T_v \neq \emptyset$, jelikož $uv \in E(G)$, a proto existuje $x \in V(T)$ tž. $u, v \in \beta(x)$. Proto $T_H = T_{H-v} \cup T_v$ je souvislý. \square

Lemma 2. Je-li (T, β) stromový rozklad G a K je klika v G , pak existuje $x \in V(T)$ tž. $K \subseteq \beta(x)$.

Důkaz. Indukcí dle velikosti K . Pro $|K| \leq 2$ platí z definice stromového rozkladu. Nechť $K = \{v_1, \dots, v_k\}$ pro nějaké $k \geq 3$. Nechť $K_1 = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ a $K_2 = \{v_2, \dots, v_k\}$. Z indukčního předpokladu existují vrcholy $x_1, x_2 \in V(T)$ tž. $K_1 \subseteq \beta(x_1)$ a $K_2 \subseteq \beta(x_2)$. Nechť x je poslední vrchol na cestě z x_1 do x_2 v T tž. $v_1 \in \beta(x)$. Zjevně $\{v_2, \dots, v_{k-1}\} \in \beta(x)$. Kdyby $v_k \notin \beta(x)$, pak T neobsahuje žádný vrchol y splňující $v_1, v_k \in \beta(y)$, což je spor, jelikož $v_1 v_k \in E(G)$. Proto $K \subseteq \beta(x)$. \square

1 Stromová šířka

Definice 2. Šířka stromového rozkladu (T, β) je $\max\{|\beta(v)| : v \in V(T)\} - 1$. Stromová šířka $\text{tw}(G)$ grafu G je nejmenší šířka jeho stromového rozkladu.

Pozorování 3. Graf G má stromovou šířku nejvýše t právě tehdy, lze-li ho vyrobit pomocí $(\leq t)$ -sum z grafů s nejvýše $t + 1$ vrcholy.

Lemma 4. Je-li H minor G , pak $\text{tw}(H) \leq \text{tw}(G)$.

Důkaz. Nechť (T, β) je stromový rozklad G šířky $t = \text{tw}(G)$. Nechť φ je model H v G . Definujme β' tak, že pro $x \in V(T)$ vrchol $v \in V(H)$ patří do $\beta'(x)$ právě tehdy, když $\varphi(v) \cap \beta(x) \neq \emptyset$. Pak (T, β') je stromový rozklad H šířky nejvýše t . \square

Pozorování 5. $\text{tw}(K_n) = n - 1$.

Lemma 6. Pro graf G platí:

- $\text{tw}(G) = 0$, právě když $E(G) = \emptyset$, tj. K_2 není minor G .
- $\text{tw}(G) \leq 1$, právě když G je les, tj. K_3 není minor G .
- $\text{tw}(G) \leq 2$, právě když K_4 není minor G .

Důkaz. Stačí zkonstruovat stromové rozklady. Pro grafy bez minoru K_4 plyne z Lemma 4 z poznámek k 5-té přednášce. \square

Definice 3. Bramble B v grafu G je množina neprázdných podmnožin $V(G)$ taková, že pro libovolné $X, Y \in B$ je podgraf G indukovaný $X \cup Y$ souvislý (a speciálně, každá $X \in B$ indukuje souvislý podgraf). Řád bramble B je velikost nejmenší množiny $Z \subseteq V(G)$ takové, že $X \cap Z \neq \emptyset$ pro každé $X \in B$.

Lemma 7. Nechť (T, β) je stromový rozklad G a B je bramble v G . Pak existuje $v \in V(T)$ tž. $\beta(v)$ protíná všechny množiny z B .

Důkaz. Pro hranu $uv \in E(T)$ nadefinujme $T_{u,v}$ jako podstrom $T - uv$ obsahující v .

Pro spor předpokládejme, že pro každé $u \in V(T)$ existuje $X \in B$ disjunktní s $\beta(u)$. Jelikož $G[X]$ je souvislý, $\{x : \beta(x) \cap X \neq \emptyset\}$ indukuje souvislý podstrom T_X stromu T dle Lemma 1. Existuje tedy soused v vrcholu u v T takový, že $T_X \subseteq T_{u,v}$. Označme $\pi(u) := v$ a $X(u) := X$.

Jelikož T je strom, existuje $uv \in E(T)$ tž. $\pi(u) = v$ a $\pi(v) = u$. Jelikož $X(u) \cup X(v)$ indukuje souvislý podgraf G , existují vrcholy $w \in X(u)$ a $z \in X(v)$ tž. $w = z$ nebo $wz \in E(G)$, a z definice stromového rozkladu existuje $x \in V(T)$ tž. $w, z \in \beta(x)$. Ale stromy $T_{X(u)} \subseteq T_{u,v}$ a $T_{X(v)} \subseteq T_{v,u}$ jsou disjunktční, což je spor. \square

Důsledek 8. *Nechť (T, β) je stromový rozklad G a B je bramble v G řádu k . Pak (T, β) má šířku alespoň $k - 1$.*

Mřížka o rozměrech $n \times n$ je graf s množinou vrcholů $\{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n\}$ tž. dva vrcholy (i_1, j_1) a (i_2, j_2) sousedí právě tehdy, když $|i_2 - i_1| + |j_2 - j_1| = 1$.

Lemma 9. *Mřížka o rozměrech $n \times n$ má stromovou šířku alespoň $n - 1$.*

Důkaz. Nechť R_i je i -tý řádek a S_j je j -tý sloupec mřížky. Nechť $B = \{R_i \cup S_j : 1 \leq i, j \leq n\}$. Pak B je bramble řádu n . \square

Důsledek 10. *Existují grafy bez minoru K_5 s libovolně velkou stromovou šířkou.*

2 Chordální grafy

Definice 4. *Graf G je chordální, jestliže neobsahuje žádný indukovaný cyklus délky alespoň 4.*

Vrchol v je *simpliciální*, jestliže jeho okolí indukuje kliku.

Lemma 11 (Viz KG2). *Graf je G chordální právě tehdy, jestliže každý jeho indukovaný podgraf obsahuje simpliciální vrchol.*

Důsledek 12. *Graf G je chordální právě tehdy, když má stromový rozklad (T, β) takový, že $\beta(x)$ je klika v G pro každé $x \in V(T)$.*

Důkaz. Dokazujeme indukcí dle počtu vrcholů G . Nechť G je chordální a v je jeho simpliciální vrchol. Z indukce má $G - v$ stromový rozklad (T', β') takový, že $\beta'(x)$ je klika v $G - v$ pro každé $x \in V(T')$. Okolí v v G je klika K , a dle Lemma 2 existuje $z \in V(T')$ takové, že $K \subseteq \beta'(z)$. Nechť T vznikne z T' přidáním listu y sousedícího s z , a nechť β je definováno jako $\beta(x) = \beta'(x)$ pro $x \in V(T')$ a $\beta(y) = K \cup \{v\}$. Pak (T, β) je stromový rozklad G s požadovanými vlastnostmi.

Opačné tvrzení viz domácí úkol. \square

Důsledek 13. *Graf G má stromovou šířku nejvýše t právě tehdy, když je podgrafem chordálního grafu klikovosti $t + 1$.*

3 Bramble a stromová šířka

Separace grafu G je dvojice (A, B) , kde $A, B \subseteq V(G)$, $A \cup B = V(G)$, a každá hrana G je obsažena buď v $G[A]$ nebo v $G[B]$ (tedy neexistuje hrana mezi $A \setminus B$ a $B \setminus A$). Velikost separace (A, B) je $|A \cap B|$.

Lemma 14. *Nechť (T, β) je stromový rozklad grafu G a $w \in V(T)$. Nechť (A, B) je separace velikosti k tž. $\beta(w) \subseteq A$ a $\beta(w)$ nelze oddělit od $A \cap B$ odebráním méně než k vrcholů. Pak existuje stromový rozklad (T, β') grafu $G[B]$ tž.*

- $\beta'(w) = A \cap B$,
- každý vrchol $v \in V(T)$ splňuje $|\beta'(v)| \leq |\beta(v)|$ a
- každý list $v \in V(T)$ různý od w splňuje $\beta'(v) \subseteq \beta(v)$.

Důkaz. Dle Mengerovy věty existuje k disjunktních cest P_1, \dots, P_k v G z $\beta(w)$ do $A \cap B$. Jelikož $|A \cap B| = k$ a $\beta(w) \subseteq A$, tyto cesty jsou obsaženy v $G[A]$. Nechť z_i je konec cesty P_i v $A \cap B$. Nadefinujeme $\beta'(v) = \beta(v) \cap B$ pro listy $v \in V(T)$ a $\beta'(v) = (\beta(v) \cap B) \cup \{z_i : V(P_i) \cap \beta(v) \neq \emptyset\}$. Tvrdíme, že toto dává stromový rozklad $G[B]$ splňující podmínky. Jediná netriviální k ověření je, že $\{x \in V(T) : z_i \in \beta'(x)\}$ indukuje souvislý podstrom pro každé $z_i \in A \cap B$. Nicméně $\{x \in V(T) : V(P_i) \cap \beta(x) \neq \emptyset\}$ indukuje souvislý podstrom dle Lemma 1, a $\{x \in V(T) : z_i \in \beta'(x)\}$ se od něj liší pouze odebráním některých listů. \square

Lemma 15. *Nechť B je bramble v grafu G taková, že neexistuje bramble $B' \supseteq B$ řádu alespoň k . Pak existuje stromový rozklad (T, β) grafu G takový, že každý vrchol $v \in V(T)$ splňující $|\beta(v)| \geq k$ je list T a existuje $X \in B$ disjunktní s $\beta(v)$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí dle $2^{|V(G)|} - |B|$, předpokládejme proto, že platí pro všechny bramble s víc než $|B|$ prvky. Nechť $Z \subseteq V(G)$ je nejmenší množina protínající všechny prvky B ; jelikož řád B je menší než k , máme $|Z| < k$. Tvrzení platí triviálně, jestliže $V(G) = Z$ (T lze zvolit jako jednovrcholový strom), proto předpokládejme, že $V(G) \neq Z$.

Uvažme libovolnou komponentu C grafu $G - Z$. Ukážeme, že platí následující tvrzení:

- (\star) Bud' G má stromový rozklad splňující podmínky lemmatu, nebo graf $G[Z \cup C]$ má stromový rozklad (T_C, β_C) s vrcholem v_C takovým, že $\beta_C(v_C) = Z$ a každý vrchol $v \in V(T_C)$ splňující $|\beta_C(v)| \geq k$ je list T_C a existuje $X \in B$ disjunktní s $\beta_C(v)$.

Toto tvrzení zjevně implikuje tvrzení lemmatu pro strom T vzniklý ze sjednocení stromů T_C pro všechny komponenty C grafu $G - Z$ zidentifikováním vrcholů v a pro $\beta(v)$ definované jako $\beta_C(v)$ pro C takové, že $v \in V(T_C)$.

Zbývá tedy dokázat platnost tvrzení (\star) . Jestliže existuje $X \in B$ tž. $G[X \cup C]$ není souvislý graf, pak nechť T_C je strom se dvěma vrcholy v_C a w_C , $\beta(v_C) = Z$ a $\beta(w_C) = Z' \cup C$, kde Z' je množina vrcholů Z , které mají souseda v C ; zjevně X je disjunktní s $\beta(w_C)$, a proto tento stromový rozklad splňuje podmínky (\star) .

Nechť tedy $G[X \cup C]$ je souvislý graf pro každé $X \in B$, a $B' = B \cup \{C\}$ je tedy bramble. Dle indukčního předpokladu existuje stromový rozklad (T_C, β') grafu G takový, že každý vrchol $v \in V(T_C)$ splňující $|\beta'(v)| \geq k$ je list T_C a existuje $X \in B'$ disjunktní s $\beta'(v)$. Můžeme předpokládat, že tento rozklad nesplňuje podmínky lemmatu a existuje tedy list v_C stromu T_C takový, že $|\beta'(v_C)| \geq k$ a $\beta'(v_C)$ protíná všechny prvky B ; máme tedy $\beta'(v_C) \cap C \neq \emptyset$.

Povšimněme si, že $\beta'(v_C)$ nelze oddělit od Z odebráním méně než $|Z|$ vrcholů – jelikož B má řád $|Z|$, existuje $X \in B$ disjunktní s odebranými vrcholy, $G[X]$ je souvislý graf, a X protíná jak Z tak $\beta'(v_C)$. Můžeme tedy aplikovat Lemma 14 s $w = v_C$, $A = V(G) \setminus C$ a $B = Z \cup C$. Tím dostaneme z (T_C, β') rozklad (T_C, β_C) splňující podmínku (\star) : každý vrchol $v \in V(T_C)$ splňující $|\beta_C(v)| \geq k$ je list T_C , jelikož $|\beta'(v)| \geq |\beta(v_C)|$ a proto $\beta(v) \subseteq \beta'(v)$. Navíc dle volby (T_C, β') existuje $X \in B'$ disjunktní s $\beta'(v)$ a tedy i s $\beta_C(v)$ a nemůže být $X = C$, jelikož $\beta(v) \subseteq Z \cup C$ a $|\beta(v)| \geq k > |Z|$. \square

Aplikujeme-li předchozí lemma s $B = \emptyset$, dostáváme následující.

Důsledek 16. *Jestliže G nemá žádnou brambli řádu k , pak existuje stromový rozklad G šířky nejvýše $k - 2$.*