Linkovanost a topologické minory

Zdeněk Dvořák

10. října 2016

1 Hajósova hypotéza

Hypotéza 1 (Hajós)**.** *Každý graf neobsahující podrozdělení K_{k+1} jako podgraf má barevnost nejvýše k.*

Věta 1. *Hajósova hypotéza neplatí.*

Důkaz. Nechť G je libovolný graf s n vrcholy a nechť $a \geq 2$ je přirozené číslo takové, že $\alpha(G) < a$. Pak $\chi(G) \geq \lceil n/(a-1) \rceil$, a kdyby platila Hajósova hypotéza, G by musel obsahovat podrozdělení K_x, kde $x \geq \lceil n/(a-1) \rceil > n/a$. Nechť X je množina větvicích vrcholů tohoto podrozdělení. Nejvýše $n-x$ podrozdělených hran K_x může procházet vrcholy G nepatřícími do X, podgraf $G[X]$ má tedy alespoň $\binom{x}{2} - (n-x) \geq \frac{x^2}{2} - n = \frac{x^2}{2}(1 - 2n/x^2)$ hran. Z Turánovy věty plyne, že $G[X]$ obsahuje kliku s alespoň $\frac{x^2}{2n} \geq \frac{n}{2a^2}$ vrcholy.

Kdyby tedy platila Hajósova hypotéza, pak by každý graf s alespoň $2a^3$ vrcholy obsahoval buď kliku nebo nezávislou množinu velikosti alespoň a. To je pro velké a spor, jelikož Ramseyovská čísla jsou exponenciální (existuje graf s $2^{\Omega(a)}$ vrcholy, který neobsahuje ani kliku ani nezávislou množinu velikosti alespoň a). $\square$

2 Souvislost a linkovanost

Graf je *k-linkovaný*, jestliže pro každých $2k$ navzájem různých vrcholů s_1, $\ldots$, s_k, t_1, $\ldots$, t_k v něm existují navzájem vrcholově disjunktní cesty $P_1, \ldots, P_k$, kde P_i spojuje s_i s t_i pro $i = 1, \ldots, k$. Takovýmto cestám budeme říkat *$s-t$-linkování*. Naším cílem je dokázat následující výsledek.

Věta 2. *Je-li G $2k$-souvislý a obsahuje-li minor K_{4k}, pak G je k-linkovaný.*

Pro potřeby indukce budeme dokazovat následující silnější tvrzení.

Věta 3. *Nechť G je graf, $S = \{s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k\}$ podmnožina jeho vrcholů a H_1, ..., H_{4k} navzájem vrcholově disjunktní neprázdné podgrafy G splňující následující podmínky:*

(a) Pro $1 \leq i \leq 4k$, jestliže H_i není souvislý, pak každá jeho komponenta obsahuje vrchol z S.

(b) Pro $1 \leq i < j \leq 4k$, jestliže G neobsahuje hranu s jedním koncem ve $V(H_i)$ a druhým ve $V(H_j)$, pak jak H_i tak H_j obsahují vrchol z S.

(c) Pro všechny podgrafy $A, B \subseteq G$, jestliže $G = A \cup B$, $S \subseteq V(A)$ a existuje $i \in \{1, \ldots, 4k\}$ tž. $H_i \subseteq B - V(A)$, pak $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k$.

Potom G obsahuje $s - t$-linkování.

Důkaz věty 2 za pomoci věty 3. Mějme libovolné $S = \{s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k\} \subseteq V(G)$. Z předpokladů G obsahuje minor K_{4k}, tedy existují disjunktní neprázdné souvislé podgrafy $H_1, \ldots, H_{4k} \subset V(G)$ takové, že mezi každými dvěma z nich vede hrana; tyto podgrafy zjevně splňují podmínky (a) a (b) věty 3. Jelikož G je $2k$-souvislý, každý jeho řez má velikost alespoň $2k$, a proto G splňuje i podmínku (c). Věta 3 tedy implikuje, že G obsahuje $s-t$-linkování, jak jsme požadovali. $\square$

Důkaz věty 3. Budeme postupovat indukcí, předpokládáme tedy, že tvrzení platí pro všechny vlastní minory G. Uvažme nejprve případ, že existují podgrafy $A, B \subseteq G$ a $i \in \{1, \ldots, 4k\}$ takové, že $G = A \cup B$, $S \subsetneq V(A)$, $H_i \subseteq B - V(A)$ a $|V(A) \cap V(B)| = 2k$. Položme $S' = V(A) \cap V(B)$ a $H'_j = H_j \cap B$ pro $1 \leq j \leq 4k$. Z Mengerovy věty a podmínky (c) plyne, že existují navzájem vrcholově disjunktní cesty $S_1, \ldots, S_k, T_1, \ldots, T_k \subset G$ s jedním koncem v S a druhým v S', kde s_j je konec S_j a t_j je konec T_j pro $1 \leq j \leq k$. Konec S_j v S' označme s'_j a konec T_j v S' označme t'_j.

Jelikož $S \subset V(A)$ a $H_i \subseteq B - V(A)$, vidíme, že H_i je disjunktní s S a $H'_i = H_i$. Mějme libovolné $j \in \{1, \ldots, 4k\}$ různé od i. Jelikož H_i je disjunktní s S, dle podmínky (b) G obsahuje hranu e spojující H_i s H_j. Tato hrana má jeden konec (ten v H_i) obsažen v $B - V(A)$, proto $e \notin E(A)$, a jelikož $G = A \cup B$, máme $e \in E(B)$. Proto druhý konec e patří do $B \cap H_j$, a H'_j je tedy neprázdné. Ukažme, že B s množinou S' a podgrafy H'_1, ..., H'_{4k} splňuje podmínky věty 3:

(a) Mějme libovolné $j \in \{1, \ldots, 4k\}$, a předpokládejme, že H'_j obsahuje komponentu F disjunktní s S'. Pak F je i komponenta H_j: v jiném případě by H_j obsahovalo hranu e s jedním koncem v $V(F) \subseteq V(B) \setminus S' = V(B) \setminus V(A)$ a druhým koncem v $H_j - V(B)$, a taková hrana e

by nemohla patřit ani do A ani do B. Jelikož $V(F) \subseteq V(B) \setminus V(A)$ a $S \subset V(A)$, vidíme, že F neobsahuje žádný vrchol z S. Z podmínky (a) pro G a H_j tedy plyne, že H_j je souvislý, a tedy $H_j = F$. Pak ale i $H'_j = F$ je souvislý.

(b) Mějme libovolné různé $j, m \in \{1, \ldots, 4k\}$. Pokud H'_j i H'_m obsahují vrchol z S', pak je podmínka (b) zjevně splněna. BÚNO tedy předpokládejme, že $H'_j \subseteq B - S' = B - V(A)$. Speciálně dle předchozího bodu víme, že $H'_j = H_j$ a H_j tedy neobsahuje vrchol z S. Díky podmínce (b) pro G, H_j a H_m proto v G existuje hrana e spojující H_j a H_m. Konec e v H_j leží v $B - V(A)$, proto $e \notin E(A)$ a tedy $e \in E(B)$. Hrana e tedy v B spojuje vrchol H'_j s vrcholem z $H_m \cap B = H'_m$.

(c) Nechť $B = A' \cup B'$, $S' \subseteq V(A')$ a existuje $j \in \{1, \ldots, 4k\}$ tž. $H'_j \subseteq B' - V(A')$. Pak $G = (A \cup A') \cup B'$, $S \subseteq V(A \cup A')$ a $H_j = H'_j \subseteq B' - V(A') = B' - (V(A) \cup V(A'))$. Z podmínky (c) pro G tedy máme $|(V(A) \cup V(A')) \cap V(B')| \geq 2k$. Jelikož $(V(A) \cup V(A')) \cap V(B') = V(A') \cap V(B')$, podgrafy A' a B' splňují podmínku (c) pro B.

Jelikož $S \subsetneq A$ a $|V(A) \cap V(B)| = |S|$, vidíme, že existuje vrchol $v \in V(A) \setminus V(B)$, a B je proto vlastní podgraf G. Z indukčního předpokladu tedy B obsahuje $s' - t'$-linkování $P'_1, \ldots, P'_k$. Položíme-li $P_j = S_j \cup P'_j \cup T_j$ pro $1 \leq j \leq k$, pak $P_1, \ldots, P_k$ je $s - t$-linkování v G.

Zbývá tedy případ, kdy

($\star$) každé dva podgrafy $A, B \subseteq G$ takové, že $G = A \cup B$, $S \subsetneq V(A)$ a $H_i \subseteq B - V(A)$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, 4k\}$, splňují $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k + 1$.

Nechť e je hrana G. Jestliže oba konce e leží v S, pak $G - e$ splňuje všechny předpoklady věty 3:

(a) Triviálně plyne z (a) pro G, pokud e není most v H_i. Pokud e je most v H_i, pak obě komponenty vzniklé odebráním e obsahují vrchol z S.

(b) Triviálně plyne z (b) pro G, pokud e není jediná hrana mezi H_i a H_j. Pokud e je hrana mezi H_i a H_j, pak H_i i H_j obsahují vrchol z S.

(c) Triviálně plyne z (c) pro G.

Z indukce $G - e$ obsahuje $s - t$-linkování, a tedy i G obsahuje $s - t$-linkování. Můžeme proto předpokládat, že e má alespoň jeden konec mimo S.

Jestliže e má oba konce v $V(H_i)$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, 4k\}$, nebo jestliže e má alespoň jeden konec v $V(G) \setminus (V(H_1) \cup \ldots \cup V(H_{4k}))$, pak uvažme graf G/e vzniklý kontrakcí hrany e, s podgrafy $H'_j = H_j/e$ pro $j = 1, \ldots, 4k$. Vlastnosti

(a) a (b) jsou triviálně splněné. Nechť $G/e = A' \cup B'$, kde $S \subsetneq V(A')$ a $H'_m \subseteq B' - V(A')$ pro nějaké $m \in \{1, \ldots, 4k\}$, a jako A a B označme podgrafy G takové, že $G = A \cup B$, $A' = A/e$ a $B' = B/e$. Pak $S \subsetneq V(A)$ a $H_m \subseteq B - V(A)$. Dle ($\star$) máme $|V(A) \cap V(B)| \geq 2k+1$, a proto $|V(A') \cap V(B')| \geq 2k$. Graf G/e tedy splňuje podmínky věty 3, a z indukce proto obsahuje $s-t$-linkování. Dekontrakcí hrany e dostáváme $s-t$-linkování v G.

Zbývá proto případ, že S je nezávislá množina a každá hrana G spojuje vrcholy v různých podgrafech H_i a H_j. Speciálně pro každé $i = 1, \ldots, 4k$, $V(H_i)$ je nezávislá množina, a z podmínky (a) plyne, že buď $V(H_i) \subseteq S$, nebo H_i je jen jeden vrchol. Zjevně také můžeme předpokládat, že každý vrchol G patří buď do S nebo do $H_1 \cup \ldots \cup H_{4k}$, jinak ho můžeme smazat. Z podmínky (b) tedy plyne, že $G - S$ je klika.

Pokud existuje párování mezi S a $V(G - S)$, které pokrývá S, pak toto párování spolu s hranami v klice $G - S$ obsahuje $s - t$-linkování. Jinak z Hallovy věty existuje $S' \subseteq S$ taková, že všichni sousedi S' leží v množině $Y \subseteq V(G - S)$ a $|Y| < |S'|$. Pak ale položíme $A = G[S \cup Y]$ a $B = G - S'$ a máme $G = A \cup B$, $S \subseteq V(A)$ a $|V(A) \cap V(B)| = |(S \setminus S') \cup Y| < 2k$. Navíc $|V(A)| = |S| + |Y| \leq 4k - 1$, a tedy existuje H_i disjunktní s $V(A)$. Podgrafy A a B jsou však ve sporu s podmínkou (c), a tento případ tedy nemůže nastat. □

3 Linkovanost a topologické minory

Důsledek 4. *Každý $12k(4k+1)$-souvislý graf je k-linkovaný.*

Důkaz. Graf G má minimální stupeň alespoň $12k(4k+1)$, má tedy alespoň $6k(4k+1)|V(G)|$ hran. Dle věty 12 z minulých poznámek tedy G obsahuje K_{4k} jako minor, a věta 2 tedy implikuje dokazované tvrzení. □

Lemma 5. *Nechť $d \geq 1$ je přirozené číslo. Má-li graf G alespoň $2d|V(G)|$ hran, pak G obsahuje $(d+1)$-souvislý podgraf H minimálního stupně alespoň $2d+1$.*

Důkaz. Nechť H je nejmenší podgraf G takový, že $|V(H)| \geq 2d$ a $|E(H)| > 2d(|V(H)| - d)$. Jestliže $|V(H)| = 2d$, pak $|E(H)| > 2d^2 > \binom{|V(H)|}{2}$, což je spor. Proto $|V(H)| \geq 2d+1$. Z minimality H nahlédneme, že odebrání libovolného vrcholu vede k odebrání více než $2d$ hran, a proto H má minimální stupeň alespoň $2d+1$.

Uvažme libovolný řez S v H; pak existují indukované podgrafy $A, B \subsetneq H$ takové, že $S = V(A \cap B)$, $H = A \cup B$ a $V(A) \neq S \neq V(B)$. Sousedi libovolného vrcholu ve $V(A) \setminus V(B)$ patří do A, a proto $|V(A)| > 2d$. Obdobně

$|V(B)| > 2d$. Z minimality H plyne, že $|E(A)| \leq 2d(|V(A)| - d)$ a $|E(B)| \leq 2d(|V(B)| - d)$. Z toho dostáváme

$$\begin{aligned}|E(H)| &\leq |E(A)| + |E(B)| \\ &\leq 2d(|V(A)| + |V(B)| - 2d) \\ &= 2d(|V(H)| - d + |V(A) \cap V(B)| - d).\end{aligned}$$

Jelikož $|E(H)| > 2d(|V(H)| - d)$, vyvodíme, že $|S| = |V(A) \cap V(B)| > d$. Jelikož toto platí pro libovolný řez S, graf G je $(d+1)$-souvislý. $\square$

Důsledek 6. *Nechť $k \geq 1$ a $d = 12\binom{k}{2}\left(4\binom{k}{2} + 1\right) + k = O(k^4)$. Každý graf G s alespoň $2d|V(G)|$ hranami obsahuje podrozdělení K_k.*

Důkaz. Dle Lemma 5 G obsahuje d-souvislý podgraf H. Nechť $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ je libovolná podmnožina vrcholů H velikosti k. Graf $H - S$ je $(d-k)$-souvislý a dle Důsledku 4 je $\binom{k}{2}$-linkovaný. Pro $1 \leq i < j \leq k$ si zvolme vrcholy s_{ij} a t_{ij} ve $V(H-S)$ tak, že $v_i s_{ij}, v_j t_{ij} \in E(H)$ a vrcholy $s_{12}, t_{12}, s_{13}, t_{13}, \ldots, s_{k-1,k}, t_{k-1,k}$ jsou navzájem různé (to lze, jelikož H má dostatečně velký minimální stupeň H). Z linkovanosti dostáváme navzájem disjunktní cesty P_{ij} spojující vrcholy s_{ij} a t_{ij} pro $1 \leq i < j \leq k$, a ty spolu s hranami do S tvoří podrozdělení K_k. $\square$