Hypergrafové removal lemma a Szemérediho věta

Zdeněk Dvořák

4. listopadu 2015

1 Hypergrafové removal lemma a jeho důsledek

Definice 1. *Dvojice* (V, E) *je* k-uniformní hypergraf*, je-li* E *množina neuspořádaných* k*-tic prvků z* V*.*

Jako $K_n^{(k)}$ označme *úplný* k*-uniformní hypergraf na* n *vrcholech*, tj. $V\big(K_n^{(k)}\big) = \{1, \ldots, n\}$ a $E\big(K_n^{(k)}\big) = \{e \subseteq \{1, \ldots, n\}, |e| = k\}$.

Věta 1 (Hypergrafové removal lemma)**.** *Pro každé* $k > 0$ *a* $\alpha > 0$ *existují* $\beta > 0$ *a* n_0 *takové, že každý* k*-uniformní hypergraf* G *s* $n \geq n_0$ *vrcholy buď*

- *obsahuje alespoň* βn^{k+1} *podhypergrafů isomorfních* $K_{k+1}^{(k)}$*, nebo*
- *existuje* $X \subseteq E(G)$ *velikosti nevýše* αn^k *tž.* $G - X$ *neobsahuje žádný podhypergraf isomorfní* $K_{k+1}^{(k)}$*.*

Pro $k = 2$ je to Removal lemma pro trojúhelníky (Věta 2) z druhé přednášky.

Lemma 2. *Pro každé* $\delta > 0$ *a* $k > 0$ *existuje* n_1 *tž. platí následující. Jestliže* $n \geq n_1$ *a* $A \subseteq \{1, \ldots, n\}^k$ *má velikost alespoň* δn^k*, pak existuje* $\vec{x} \in A$ *a* $d \neq 0$ *tž.* $\vec{x} + (d, 0, 0, \ldots) \in A$*,* $\vec{x} + (0, d, 0, \ldots) \in A$*, ...*

Důkaz. Nechť $\alpha = \frac{\delta}{2(2k)^k}$. Nechť $\beta > 0$ a n_0 jsou odpovídající konstanty z hypergrafového removal lemma. Nechť $n_1 = \lceil \max(n_0, 1/\beta) \rceil$.

Nechť G je k-uniformní hypergraf s vrcholy $\{v_{c,i} : 1 \leq c \leq k, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{k+1,i} : 1 \leq i \leq kn\}$ a hranami definovanými následovně:

- $v_{1,x_1} v_{2,x_2} \ldots v_{k,x_k}$ je hrana, jestliže $(x_1, \ldots, x_k) \in A$.

- pro $1 \leq j \leq k$, $v_{1,x_1} \dots v_{j-1,x_{j-1}} v_{j+1,x_{j+1}} \dots v_{k,x_k} v_{k+1,z}$ je hrana, jestliže $(x_1, \dots, x_{j-1}, z - x_1 - \dots - x_{j-1} - x_{j+1} - \dots - x_k, x_{j+1}, \dots, x_k) \in A$.

Položme $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ a $d = z - x_1 - \dots - x_k$. Pak $\{v_{1,x_1}, v_{2,x_2}, \dots, v_{k,x_k}, v_{k+1,z}\}$ indukuje $K_{k+1}^{(k)}$ právě tehdy, když $\vec{x} \in A$, $\vec{x} + (d, 0, 0, \dots) \in A$, $\vec{x} + (0, d, 0, \dots) \in A, \dots$ Takový podhypergraf $K_{k+1}^{(k)}$ nám tedy dává požadované řešení, jestliže $d \neq 0$. Označme jako T množinu podhypergrafů $K_{k+1}^{(k)}$ s $d = 0$; máme $|T| = |A| \leq n^k$, tvrzení tedy platí, jestliže G obsahuje více než n^k podhypergrafů $K_{k+1}^{(k)}$.

Nechť G obsahuje nejvýše $n^k < \frac{1}{n}(2kn)^{k+1} = \frac{1}{n}|V(G)|^{k+1} \leq \beta |V(G)|^{k+1}$ podhypergrafů $K_{k+1}^{(k)}$. Dle Věty 1 existuje $X \subseteq E(G)$ velikosti nejvýše $\alpha |V(G)|^k = \frac{\delta}{2} n^k$ taková, že $G - X$ neobsahuje žádný podhypergraf $K_{k+1}^{(k)}$. Povšimněme si, že hypergrafy v T jsou navzájem hranově disjunktní, a protože každý z nich musí obsahovat hranu z X, dostáváme $|X| \geq |T|$. To je spor, jelikož $|T| = |A| \geq \delta n^k$. $\square$

2 Aritmetické posloupnosti v hustých podmnožinách čísel

Věta 3 (Szemerédi)**.** *Pro každé $\gamma > 0$ a $k > 0$ existuje n_1 tž. platí následující. Jestliže $n \geq n_1$ a $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ má velikost alespoň γn, pak $b, b+d, \dots, b+kd \in B$ pro nějaká $b, d > 0$.*

Důkaz. Nechť $\delta = \left(\frac{\gamma}{4k^2}\right)^{k-1} \frac{\gamma}{2}$ a zvolme n_1 tak, aby platilo Lemma 2 a $n_1 \geq 4k^2/\gamma$.

Položme $A = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k \in B\}$. Odhadněme velikost A: pro každé $b \in B$ můžeme zvolit $x_2, \dots, x_k \leq \frac{b}{k^2}$ libovolně a dopočítat x_1 tak, aby $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = b$; jestliže $b \geq 2k^2$, dostáváme tedy alespoň $\left\lfloor \frac{b}{k^2} \right\rfloor^{k-1} \geq \frac{1}{(2k^2)^{k-1}} b^{k-1}$ prvků z A. Proto

$$\begin{aligned}
|A| &\geq \frac{1}{(2k^2)^{k-1}} \sum_{b \in B, b \geq 2k^2} b^{k-1} \\
&\geq \frac{1}{(2k^2)^{k-1}} \sum_{b \in B, b \geq \gamma n/2} b^{k-1} \\
&\geq \frac{1}{(2k^2)^{k-1}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{k-1} n^{k-1} |\{b \in B : b \geq \gamma n/2\}| \\
&\geq \left(\frac{\gamma}{4k^2}\right)^{k-1} \frac{\gamma}{2} n^k = \delta n^k.
\end{aligned}$$

Dle Lemma 2 tedy existuje $\vec{x} \in A$ a $d \neq 0$ tž. $\vec{x} + (d, 0, 0, \ldots) \in A$, $\vec{x} + (0, d, 0, \ldots) \in A$, ... Nechť $a = x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k$. Pak $a \in B$, $a + d \in B$, $\ldots$, $a + kd \in B$. $\square$