Další aplikace regularity lemma a jeho důkaz

Zdeněk Dvořák

26. října 2015

Další aplikace regularity lemma

Definice 1. *Pro graf H jako $r(H)$ označme nejmenší přirozené číslo takové, že pro každé $n \geq r(H)$ platí následující: nechť G_R je libovolný graf na n vrcholech a nechť G_B je jeho doplněk; pak $H \subseteq G_R$ nebo $H \subseteq G_B$.*

Připomenutí: $r(K_k) \leq 4^k$.

Věta 1. *Pro každé $\Delta > 0$ existuje $\beta > 0$ takové, že je-li H graf maximálního stupně nejvýše Δ, pak $r(H) \leq \beta|V(H)|$.*

Náznak důkazu. Vhodně zvolíme parametry $\varepsilon > 0$, m_0, a β. Nechť $n \geq \beta|V(H)|$, nechť G_R je libovolný graf na n vrcholech a nechť G_B je jeho doplněk. Dle Regularity lemmatu má G_R ε-regulární rozklad $V_0, \ldots, V_m$ pro nějaké $m_0 \leq m \leq M$. Nechť Q je pomocný graf s vrcholy $\{1, \ldots, m\}$, kde ij je hrana, jestliže pár (V_i, V_j) je ε-regulární.

Graf Q má tedy alespoň $\binom{m}{2} - \varepsilon m^2$ hran. Jelikož $m \geq m_0$, z Turánovy věty vyvodíme, že existuje nějaká $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ velikosti alespoň $r(K_{\Delta+1})$ indukující v Q úplný podgraf. Nechť Q_R je graf s $V(Q_R) = I$, kde ij je hrana, jestliže $d_{G_R}(V_i, V_j) \geq 1/2$. Nechť Q_B je doplněk Q_R; povšimněte si, že je-li $ij \in E(Q_B)$, pak (V_i, V_j) je ε-regulární pár v G_B a $d_{G_B}(V_i, V_j) \geq 1/2$.

Jelikož $|I| \geq r(K_{\Delta+1})$, existuje $J \subseteq I$ velikosti $\Delta+1$ takové, že buď $Q_R[J]$ nebo $Q_B[J]$ je úplný graf. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nastane druhá z těchto možností. Pak pro každá různá $i, j \in J$ platí, že (V_i, V_j) je ε-regulární pár v G_B a $d_{G_B}(V_i, V_j) \geq 1/2$. Navíc $|V_i| \geq \frac{1-\varepsilon}{m} n \geq \frac{(1-\varepsilon)\beta}{M}|V(H)|$. Protože H má maximální stupeň nejvýše Δ, jeho barevnost je nejvýše $\Delta+1$. Pro dostatečně velké c tedy z Lemma 3 plyne, že $H \subseteq G_B$. $\square$

Důkaz regularity lemma

Lemma 2 (Cauchy-Schwarzova nerovnost)**.** *Pro libovolná reálná čísla* u_1, $\dots$, u_n *a* v_1, $\dots$, v_n *platí* $\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2$.

Věta 3 (Szemerédiho Regularity lemma)**.** *Pro každé* $m_0 > 0$ *a* $\varepsilon > 0$ *existuje* $M \geq m_0$ *tak, že platí následující. Každý graf* G *s alespoň* m_0 *vrcholy má* ε*-regulární rozklad řádu alespoň* m_0 *a nanejvýš* M*.*

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\varepsilon < 1/2$. Z technických důvodů si místo jedné malé odpadní množiny V_0 budeme udržovat malý počet jednoprvkových odpadních částí. Nechť G má $n \geq m_0$ vrcholů. Pro disjunktní $A, B \subseteq V(G)$ si označme $q(A,B) = |A||B|d^2(A,B)$. Nechť $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ je rozklad $V(G)$. Jako $q(\mathcal{P})$ si označme $\sum_{i<j} q(P_i, P_j)$. Zjevně $q(A,B) \leq |A||B|$ a $q(\mathcal{P}) \leq \sum_{i<j} |P_i||P_j| < n^2$.

Lemma 4. *Je-li* $\{A_1, \dots, A_s\}$ *rozklad* A *a* $\{B_1, \dots, B_s\}$ *rozklad* B*, pak* $\sum_{i,j} q(A_i, B_j) \geq q(A,B)$.

Důkaz. Máme $e(A,B) = \sum_{i,j} e(A_i, B_j)$. Dále si povšimněme, že $|A||B| = \sum_{i,j} |A_i||B_j|$.

Položme $u_{i,j} = \sqrt{|A_i||B_j|}d(A_i, B_j)$ a $v_{i,j} = \sqrt{|A_i||B_j|}$. Máme tedy

$$\sum_{i,j} u_{i,j}^2 = \sum_{i,j} q(A_i, B_j)$$

$$\sum_{i,j} v_{i,j}^2 = \sum_{i,j} |A_i||B_j| = |A||B|$$

$$\sum_{i,j} u_{i,j}v_{i,j} = \sum_{i,j} d(A_i, B_j)|A_i||B_j| = \sum_{i,j} e(A_i, B_j) = e(A,B).$$

Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pak dostáváme

$$|A||B| \sum_{i,j} q(A_i, B_j) \geq e^2(A,B) = |A|^2|B|^2d^2(A,B),$$

a tedy

$$\sum_{i,j} q(A_i, B_j) \geq |A||B|d^2(A,B) = q(A,B).$$

□

Rozdělení $\mathcal{P}'$ *zjemňuje* rozdělení $\mathcal{P}$, jestliže každé $P' \in \mathcal{P}'$ je podmnožinou nějaké části $P \in \mathcal{P}$. *Společné zjemnění* dvou rozdělení $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$ obsahuje části $\{A \cap B : A \in \mathcal{P}_1, B \in \mathcal{P}_2, A \cap B \neq \emptyset\}$.

Důsledek 5. *Jestliže $\mathcal{P}'$ zjemňuje $\mathcal{P}$, pak $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P})$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_s\}$. Pro $1 \leq i \leq s$ jako $\mathcal{P}_i$ označme $\{Q \in \mathcal{P}' : Q \subseteq P_i\}$, takže $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_s$. Pak $q(\mathcal{P}') \geq \sum_{1 \leq i < j \leq s} \sum_{Q \in \mathcal{P}_i, R \in \mathcal{P}_j} q(Q, R) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq s} q(P_i, P_j) = q(\mathcal{P})$ dle Lemma 4. $\square$

Dale potřebujeme následující variantu Lemma 4.

Lemma 6. *Nechť A a B není ε-regulární pár, a existují tedy $A_1 \subseteq A$ a $B_1 \subseteq B$ tž. $|A_1| \geq \varepsilon|A|$, $|B_1| \geq \varepsilon|B|$, a $|d(A_1, B_1) - d(A, B)| > \varepsilon$. Položme $A_2 = A \setminus A_1$ a $B_2 = B \setminus B_1$. Pak $\sum_{1 \leq i,j \leq 2} q(A_i, B_j) > q(A, B) + \varepsilon^4|A||B|$.*

Důkaz. Nechť $d = d(A, B)$. Pro $1 \leq i, j \leq 2$, $u \in A_i$ a $v \in B_j$ nadefinujme $d(u, v) = d(A_i, B_j)$ a $\delta(u, v) = d(u, v) - d$. Máme

$$d|A||B| = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} d(A_i, B_j)|A_i||B_j| = \sum_{u \in A, v \in B} d(u, v) = d|A||B| + \sum_{u \in A, v \in B} \delta(u, v),$$

a proto

$$\sum_{u \in A, v \in B} \delta(u, v) = 0.$$

Dále, $q(A, B) = |A||B|d^2$ a

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i,j \leq 2} q(A_i, B_j) &= \sum_{1 \leq i,j \leq 2} |A_i||B_j|d^2(A_i, B_j) = \sum_{u \in A, v \in B} d^2(u, v) \\
&= \sum_{u \in A, v \in B} (d + \delta(u, v))^2 = \sum_{u \in A, v \in B} (d^2 + 2d\delta(u, v) + \delta^2(u, v)) \\
&= |A||B|d^2 + 2d \sum_{u \in A, v \in B} \delta(u, v) + \sum_{u \in A, v \in B} \delta^2(u, v) \\
&= q(A, B) + \sum_{u \in A, v \in B} \delta^2(u, v) \geq q(A, B) + \sum_{u \in A_1, v \in B_1} \delta^2(u, v) \\
&> q(A, B) + |A_1||B_1|\varepsilon^2 \geq q(A, B) + \varepsilon^4|A||B|.
\end{aligned}$$

$\square$

Nechť $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_s, V_{s+1}, \dots, V_{s+t}\}$ je rozdělení $V(G)$, kde $t \leq \varepsilon n$, $|V_i| = 1$ pro $i \geq s + 1$ a $|V_1| = \ldots = |V_s| = N$. Předpokládejme, že rozdělení $\{V_{s+1} \cup \ldots \cup V_{s+t}, V_1, \dots, V_s\}$ není ε-regulární. Pak existuje množina X obsahující alespoň εs^2 dvojic i, j takových, že (V_i, V_j) není ε-regulární. Pro každé $ij \in X$ si nadefinujme rozdělení $\mathcal{P}_{ij} = \{V_{i,j,1}, V_{i,j,2}, V_{j,i,1}, V_{j,i,2}, V(G) \setminus (V_i \cup V_j)\}$ množiny $V(G)$, kde $V_i = V_{i,j,1} \cup V_{i,j,2}$, $V_j = V_{j,i,1} \cup V_{j,i,2}$, $|V_{i,j,1}| \geq \varepsilon|V_i|$,

$|V_{j,i,1}| \geq \varepsilon|V_j|$, a $|d(V_{i,j,1}, V_{j,i,1})| > \varepsilon$. Nechť $\mathcal{P}'$ je společné zjemnění $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}_{ij}$ pro $ij \in X$.

Označme $\mathcal{V}_i = \{A \in \mathcal{P}' : A \subseteq V_i\}$. Máme

$$q(\mathcal{P}') \geq \sum_{i<j} \sum_{A\in\mathcal{V}_i, B\in\mathcal{V}_j} q(A,B).$$

Dle Lemma 4 platí

$$\sum_{A\in\mathcal{V}_i, B\in\mathcal{V}_j} q(A,B) \geq q(V_i, V_j)$$

pro každé $i < j$. Navíc pro $ij \in X$ máme

$$\sum_{A\in\mathcal{V}_i, B\in\mathcal{V}_j} q(A,B) \geq \sum_{1\leq o,p\leq 2} q(V_{i,j,o}, V_{j,i,p}) > q(V_i, V_j) + \varepsilon^4|V_i||V_j|$$

dle Lemma 6. Proto

$$q(\mathcal{P}') > \left(\sum_{i<j} q(V_i, V_j)\right) + |X|\varepsilon^4 N^2 \geq q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5 s^2 N^2 \geq q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{4} n^2.$$

Nyní $\mathcal{P}'$ má nejvýše $s2^s$ neodpadních částí, ty ale mohou mít různé velikosti. Označme $f(s) = s4^s$. Rozdělme každou neodpadní část v $\mathcal{P}'$ na co nejvíce kusů velikosti $\lceil \frac{N}{4^s} \rceil$, a zbytky rozdělme na jednoprvkové odpadní části. Tím dostáváme zjemnění $\mathcal{P}''$, kde

- každá neodpadní část v $\mathcal{P}''$ má velikost $\lceil \frac{N}{4^s} \rceil$,
- počet neodpadních částí je nejvýše $f(s)$ a
- počet odpadních částí vzroste nejvýše o $s2^s \frac{N}{4^s} \leq s\frac{n/s}{2^s} = \frac{n}{2^s}$.

Dále $q(\mathcal{P}'') \geq q(\mathcal{P}') > q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{4} n^2$.

Důkaz Regularity lemmatu. Vhodně zvolíme $s_0 \geq m_0$, viz níže, a

$$M = \max\left(\left\lceil \frac{2}{\varepsilon} s_0 \right\rceil, f(f(\ldots f(s_0)\ldots))\right),$$

kde f je volána $\lfloor \frac{4}{\varepsilon^5} \rfloor$-krát.

Jestliže G má méně než M vrcholů, pak G má ε-regulární rozklad na $|V(G)| \leq M$ částí velikosti 1. Jinak začneme s libovolným rozdělením vrcholů grafu G na $s_0 \geq m_0$ částí stejné velikosti a méně než $s_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} n$ odpadních vrcholů. Opakujme výše popsaný postup, dokud nezískáme ε-regulární rozdělení.

Jelikož $0 \leq q(\mathcal{Q}) < n^2$ pro každé rozdělení $\mathcal{Q}$ vrcholů G, počet opakování je nejvýše $\frac{4}{\varepsilon^5}$, a získáme tedy ε-regulární rozdělení s nejvýše M částmi.

Je ještě potřeba ověřit, že odpadní množina nebude příliš velká (jednak pro ověření ε-regularity vzniklého rozkladu, jednak pro zajištění korektnosti iterace výše popsaného postupu). V každé iteraci přibyde nejvýše $\frac{n}{2^s} \leq \frac{n}{2^{s_0}}$ odpadních vrcholů. Po $\left\lfloor \frac{4}{\varepsilon^5} \right\rfloor$ iteracích je tedy nejvýše $\frac{4}{\varepsilon^5 2^{s_0}} n + \frac{\varepsilon}{2} n$ odpadních vrcholů, což je nejvýše εn, zvolíme-li

$$s_0 = \max\left(m_0, \left\lceil \log \frac{8}{\varepsilon^6} \right\rceil\right).$$

□