Vybíravost grafů a Nullstellensatz

Zdeněk Dvořák

3. ledna 2017

1 Vybíravost

Přiřazení seznamů grafu G je funkce L, která každému vrcholu G přiřadí množinu barev. L-*obarvení* je dobré obarvení φ grafu G tž. $\varphi(v) \in L(v)$ pro každý vrchol $v \in V(G)$. *Vybíravost* $\chi_l(G)$ je nejmenší přirozené číslo k takové, že G je L-obarvitelný pro každé přiřazení L seznamů velikosti alespoň k.

Pozorování 1.

$$\begin{aligned} \chi_l(G) &\geq \chi(G) \\ \chi_l(G) &\leq d+1 \text{ \textit{je-li} } G \text{ } d\text{-\textit{degenerovaný}} \\ \chi_l(C_n) &= \chi(C_n) \end{aligned}$$

Lemma 2.

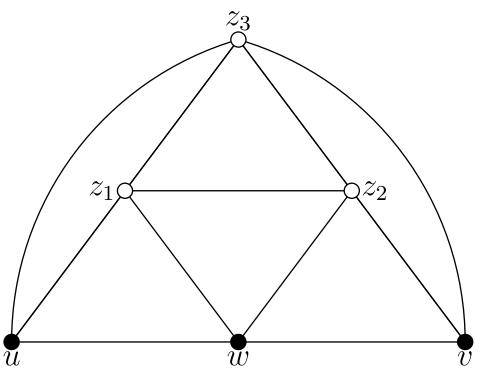
$$\chi_l(K_{n,n^n}) > n.$$

Důkaz. Nechť vrcholy jsou $v_1, \ldots, v_n$ a $w_{i_1,\ldots,i_n}$ pro $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$. Vrcholu v_k přiřadíme seznam $L(v_k) = \{c_{k,1}, \ldots, c_{k,n}\}$. Vrcholům $w_\star$ přiřadíme všechny n-prvkové seznamy, které protínají seznam každého z vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ v právě jednom prvku; tedy $L(w_{i_1,\ldots,i_n}) = \{c_{1,i_1}, c_{2,i_2}, \ldots, c_{n,i_n}\}$. Obarvíme-li vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ barvami $c_{1,i_1}, \ldots, c_{n,i_n}$, pak nelze obarvit $w_{i_1,\ldots,i_n}$ z jeho seznamu. $\square$

2 Vybíravost rovinných grafů

Lemma 3. *Existují rovinné grafy vybíravosti alespoň* 5.

Důkaz. Nechť G_{uwv} je následující graf:



Nechť $L_{1,p,a}$ je přiřazení seznamů tž. $L_{1,p,a}(z_1) = \{1, p, 5, 6\}$, $L_{1,p,a}(z_2) = \{a, p, 5, 6\}$ a $L_{1,p,a}(z_3) = \{1, a, 5, 6\}$. Pak předbarvení (u, w, v) barvami $(1, p, a)$ nelze rozšířit na $L_{1,p,a}$-obarvení grafu G_{uwv}.

Nechť G_{uv} je graf vzniklý ze dvou kopií G_{uwv} sdílejících cestu uwv. Nechť $L_{1,a}$ je přiřazení seznamů odpovídající $L_{1,p,a}$ v jedné z kopií a $L_{1,q,a}$ ve druhé a $L_{1,a}(w) = \{1, a, p, q\}$. Pak předbarvení (u, v) barvami $\{1, a\}$ nelze rozšířit na $L_{1,a}$-obarvení grafu G_{uv}.

Nechť G vznikne z 16 kopií G_{uv} sdílejících vrcholy u a v. Nechť $L(u) = \{1, 2, 3, 4\}$, $L(v) = \{a, b, c, d\}$, a L odpovídá $L(i, l)$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a $l \in \{a, b, c, d\}$ na 16 kopiích G_{uv}. Pak G není L-obarvitelný. $\square$

Věta 4 (Thomassen)**.** *Každý rovinný graf je* 5*-vybíravý. Platí i následující silnější tvrzení: nechť G je rovinný graf, P je cesta s nejvýše dvěma vrcholy obsažená v hranici vnější stěny G, a L je přiřazení seznamů velikosti* 5 *vrcholům G nesousedícím s vnější stěnou, seznamů velikosti* 3 *vrcholům G nepatřícím do P a sousedícím s vnější stěnou, a jednoprvkových navzájem různých seznamů vrcholům P. Pak G je L-obarvitelný.*

Důkaz. Indukcí dle $|V(G)|$. Bez újmy na obecnosti G je souvislý. Je také 2-souvislý, jinak uvažme $G = G_1 \cup G_2$, kde G_1 a G_2 se protínají v jednom vrcholu v a $P \subseteq G_1$. Z indukčního předpokladu lze L-obarvit G_1, změnit seznam v na jednoprvkový daný obarvením G_1 a rozšířit obarvení na G_2. Nechť K je kružnice ohraničující vnější stěnu G. Lze předpokládat, že K je indukovaná: jinak by měla chordu uv a $G = G_1 \cup G_2$ pro vlastní podgrafy G_1 a G_2 protínající se v hraně uv, tž. $P \subseteq G_1$. Z indukčního předpokladu lze L-obarvit G_1, změnit seznamy u a v na jednoprvkové dané obarvením G_1 a rozšířit obarvení na G_2. Lze také předpokládat $|V(P)| = 2$, jinak můžeme smazat barvy ze seznamu některého vrcholu K.

Nechť $V(P) = \{p, q\}$ a v je soused p v K různý od q. Nechť $\{a, b\} \subseteq L(v) \setminus L(p)$ jsou dvě libovolné barvy. Nechť L' je přiřazení seznamů tž. $L'(x) = L(x) \setminus \{a, b\}$ pro sousedy x vrcholu $v$neležící na K, a $L'(x) = L(x)$ pro ostatní vrcholy x. Pak $G - v$ je L'-obarvitelný z indukčního předpokladu a vrcholu v lze dát barvu a nebo b jinou než barva jeho souseda v K různého od p (jelikož K je indukovaný cyklus, v má právě dva sousedy v K). $\square$

3 Nullstellensatz

Použijeme následující základní tvrzení z algebry (lze dokázat indukcí dle počtu proměnných).

Lemma 5. *Nechť $p(x_1, \ldots, x_n)$ je polynom v n proměnných, v němž x_i má stupně nejvýše d_i pro $i \in \{1, \ldots, n\}$, a nechť S_i je množina komplexních čísel velikosti alespoň $d_i + 1$. Jestliže $p \neq 0$, pak existují hodnoty $s_1 \in S_1$, ..., $s_n \in S_n$ tž. $p(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.*

Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace. Grafový polynom $P_{\vec{G}}$ je definován jako

$$P_{\vec{G}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{(v_i, v_j) \in E(\vec{G})} (x_j - x_i).$$

Povšimněme si, že $P_{\vec{G}}(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ právě když funkce přiřazující vrcholům G barvy c_1, ..., c_n je dobré obarvení G.

Věta 6. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace. Předpokládejme, že člen $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ se v polynomu $P_{\vec{G}}$ vyskytuje s nenulovým koeficientem a L je přiřazení seznamů G tž. $|L(v_i)| > d_i$ pro $1 \leq i \leq n$. Pak G je L-obarvitelný.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $|L(v_i)| = d_i + 1$ a prvky $L(v_i)$ jsou komplexní čísla. Nechť $p_i(x) = \prod_{c \in L(v_i)} (x - c)$. Pak $p_i(c) = 0$ pro všechna $c \in L(v_i)$. Nechť $q_i = x^{d_i+1} - p_i$; pak q_i je polynom stupně nejvýše d_i a $q_i(c) = c^{d_i+1}$ pro všechna $c \in L(v_i)$. Nechť P je polynom vzniklý z $P_{\vec{G}}$ opakovanou substitucí q_i za x^{d_i+1} pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak $P(c_1, \ldots, c_n) = P_{\vec{G}}(c_1, \ldots, c_n)$ pro libovolná $c_1 \in L(v_1)$, ..., $c_n \in L(v_n)$ a stupeň proměnné x_i v P je nejvýše d_i. Navíc koeficient $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ je stejný v P jako v $P_{\vec{G}}$, jelikož všechny členy $P_{\vec{G}}$ mají stejný celkový stupeň (rovný $|E(G)|$) a substituce vytváří pouze členy menšího stupně. Proto $P \neq 0$ a $P(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ pro nějaké $c_1 \in L(v_1)$, ..., $c_n \in L(v_n)$ z Lemmatu 5. Pak obarvení vrcholů G barvami $c_1, \ldots, c_n$ je dobré L-obarvení. $\square$

Pozorování 7. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace. Koeficient členu $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je až na* *znaménko roven součtu znamének orientací G s vstupním stupněm v_i rovným d_i pro každé i, kde znaménko orientace je $+1$ má-li sudý počet rozdílně orientovaných hran vůči $\vec{G}$ a -1 má-li lichý počet rozdílně orientovaných hran.*

Každé dvě orientace se stejnými vstupními stupni se liší obrácením hran v nějakém Eulerovském podgrafu. Dostáváme tedy následující.

Důsledek 8. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace tž. v_i má vstupní stupeň d_i pro každé i. Pak koeficient členu $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je až na znaménko roven rozdílu počtu Eulerovských podgrafů $\vec{G}$ se sudým a lichým počtem hran.*

Je-li G bipartitní, pak každý Eulerovský podgraf jeho orientace má sudý počet hran (a nějaký takový existuje – prázdný), proto dostáváme následující.

Důsledek 9. *Nechť G je neorientovaný bipartitní graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace tž. v_i má vstupní stupeň d_i pro každé i. Pak koeficient členu $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je nenulový, a tedy G lze L-obarvit pro libovolné přiřazení seznamů L tž. $|L(v_i)| > d_i$ pro každé i.*

Speciálně rovinné bipartitní grafy mají orientaci s vstupním stupněm nejvýše 2, a jsou tedy 3-vybíravé.