Kostry v grafech

Zdeněk Dvořák

23. listopadu 2016

1 Kostry s omezeným maximálním stupněm

Nechť $c(G)$ označuje počet komponent grafu G. Nechť *k-kostra* je kostra maximálního stupně nejvýše k.

Pozorování 1. *Má-li graf G k-kostru, pak pro každou $S \subseteq V(G)$ platí*

$$c(G - S) \leq (k-1)|S| + 1.$$

Nechť T je kostra grafu H a $B \subseteq V(H)$. Pro libovolnou komponentu T' lesa $T - B$ označme jako $B(T')$ vrcholy v B sousedící v T s T'. Nechť Q je další kostra grafu H. Říkáme, že T a Q jsou *B-podobné*, jestliže $T[B] = Q[B]$ a pro každou komponentu T' lesa $T - B$ existuje komponenta Q' lesa $Q - B$ taková, že $V(T') = V(Q')$ a $B(T') = B(Q')$.

Věta 2. *Jestliže $k \geq 2$ je celé číslo a každá podmnožina S vrcholů souvislého grafu G splňuje*

$$c(G - S) \leq (k-2)|S| + 2,$$

pak G má k-kostru.

Důkaz. Nechť H je maximální indukovaný podgraf G, který má k-kostru T. Pro spor předpokládejme, že $H \neq G$.

Položme $B_0 = \emptyset$. Pro $i \geq 1$, nechť M_{i-1} je množina všech vrcholů $V(H) \setminus B_{i-1}$, které mají stupeň k v každé k-kostře H která je B_{i-1}-podobná T a položme $B_i = B_{i-1} \cup M_{i-1}$. Nechť m je nejmenší přirozené číslo takové, že $M_m = \emptyset$.

Povšimněme si, že všechny vrcholy v B_m mají stupeň k v T. Všechny vrcholy H se sousedem ve $V(G) \setminus V(H)$ musí mít stupeň k v každé k-kostře H, jinak bychom mohli najít indukovaný podgraf G větší než H a mající k-kostru. Proto všechny takové vrcholy patří do M_0, a proto i do B_m.

Nyní nahlédneme, že žádná hrana $uv \in E(H)$ nemá konce v různých komponentách $T - B_m$. Kdyby taková hrana existovala, nechť p je nejmenší index takový, že u a v leží v různých komponentách $T - B_p$. Pak u a v leží ve stejné komponentě T' lesa $T - B_{p-1}$ a odděluje je nějaký vrchol v M_{p-1}; nechť w je první vrchol na cestě z u do v v T' patřící do M_{p-1}. Jelikož $u, v \notin M_p$, pro $x \in \{u, v\}$ má graf G k-kostru Q_x B_p-podobnou kostře T takovou, že v ní x má stupeň nejvýše $k - 1$. Nechť Q'_x je komponenta $Q_x - B_p$ obsahující x a $Q''_x = Q_x[V(Q'_x) \cup B_p(Q'_x)]$. Pak $Q = T - V(Q_u) - V(Q_v) + Q''_u + Q''_v$ je k-kostra H, která je B_p-podobná T, a tedy i B_{p-1}-podobná T. Navíc u i v mají v Q stupeň nejvýše $k-1$. Nechť e je hrana sousedící s w na cestě z w do u v Q''_u. Pak u a v jsou v různých komponentách $Q - e$, a proto je $Q - e + uv$ k-kostra H, která je B_{p-1}-podobná T a navíc v ní má w stupeň menší než k. To je spor, jelikož $w \in M_{p-1}$.

Proto $H - B_m$ má stejné komponenty jako $T - B_m$ a $G - B_m$ má alespoň jednu komponentu navíc. Všechny vrcholy B_m mají stupeň k v T; při jejich postupném odebírání v pořadí dle prohledávání do hloubky z nějakého vrcholu za každý z nich dostáváme alespoň $k - 2$ nových komponent. Po odebrání prvního vrcholu máme k komponent, a tedy $c(G - B_m) > c(T - B_m) \geq (k-2)|B_m| + 2$. To je spor s předpoklady věty. □

2 Hranově disjunktní kostry

Nechť G je graf a $F_1, \ldots, F_k$ jsou hranově disjunktní lesy v G s $V(F_1) = \ldots = V(F_k) = V(G)$. Pak k-tice $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_k)$ je *k-hvozd*. Definujme $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^k E(F_i)$ a $|\mathcal{F}| = |E(\bigcup \mathcal{F})|$. Říkáme, že k-hvozd $\mathcal{F}' = (F'_1, \ldots, F'_k)$ je *podobný* $\mathcal{F}$, jestliže pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ mají komponenty F_i a F'_i stejné množiny vrcholů.

Nechť H_0 je podgraf G. Definujme podgrafy H_1, H_2, ... takto. Pro $i \geq 0$ označme jako D_i množinu dvojic $d = (e, j)$ s $e = uv \in E(H_i)$ a $1 \leq j \leq k$ takových, že u a v leží v různých komponentách $F_j \cap H_i$, ale ve stejné komponentě F_j; jako P_d označme cestu mezi u a v v F_j. Pak $H_{i+1} = H_i \cup \bigcup_{d \in D_i} P_d$. Nechť m je minimální index takový, že $H_m = H_{m+1}$. Pak $H = H_m$ je *$\mathcal{F}$-uzávěr* podgrafu H_0. *Úroveň* hrany $e \in E(H)$ je index i takový, že $e \in E(H_i) \setminus E(H_{i-1})$.

Lemma 3. *Nechť G je graf, H_0 jeho podgraf, $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_k)$ je k-hvozd v G tž. $\bigcup \mathcal{F}$ je disjunktní s $E(H_0)$ a H je $\mathcal{F}$-uzávěr H_0. Pak pro každou hranu $e \in E(H)$ existuje k-hvozd $\mathcal{F}'$ v G podobný $\mathcal{F}$ takový, že $e \notin \bigcup \mathcal{F}'$.*

Důkaz. Toto tvrzení dokážeme indukcí dle úrovně hrany e. Tvrzení je triviální, jestliže úroveň e je 0. Nechť úroveň e je $p+1$ pro nějaké $p \geq 0$. Nechť H_0, H_1,

$\ldots$, $H_m = H$ je posloupnost podgrafů z definice $\mathcal{F}$-uzávěru. Pak existuje posloupnost $d_0, d_1, \ldots, d_p$ pro nějaké $p \leq m-1$ taková, že $d_i = (e_i, j_i) \in D_i$ pro $i = 0, \ldots, p$, $e_i \in E(P_{d_{i-1}}) \setminus E(H_{i-1})$ pro $i = 1, \ldots, p$ a $e \in E(P_{d_p}) \setminus E(H_p)$. Speciálně, $e_i \notin E(P_{D_0})$ pro každé $i \geq 2$.

Nechť $\mathcal{F}_1$ je k-hvozd získaný z $\mathcal{F}$ tak, že v F_{j_0} nahradíme hranu e_1 hranou e_0, a nechť $C = P_{D_0} + e_0$. Zjevně $\mathcal{F}_1$ je k-hvozd podobný $\mathcal{F}$. Pro $i \geq 1$ označme jako P'_{d_i} cestu získanou následovně: Jestliže P_{d_i} neobsahuje hranu e_1, pak $P'_{d_i} = P_{d_i}$. Jinak buď P'_{d_i} symetrická diference cesty P_{d_i} a kružnice C (oba jsou podgrafy unicyklického grafu $F_{j_0} + e_0$, a proto je tato symetrická diference cesta). Jelikož $e_{i+1} \notin E(C)$, máme $e_{i+1} \in E(P'_{d_i})$.

Posloupnost P'_{d_1}, P'_{d_2}, $\ldots$, P'_{d_p} tedy ukazuje, že když uvážíme uzávěr $H_0 + e_1$ vůči $\mathcal{F}_1$, pak úroveň e v tomto uzávěru je nejvýše p. Z indukčního předpokladu existuje k-hvozd $\mathcal{F}'$ v G podobný $\mathcal{F}_1$ (a tedy i $\mathcal{F}$) takový, že $e \notin \bigcup \mathcal{F}'$. $\square$

Lemma 4. *Nechť G je graf a $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_k)$ je k-hvozd v G tž. $|\mathcal{F}|$ je největší možné. Nechť H_0 je podgraf G tž. $\bigcup \mathcal{F}$ je disjunktní s $E(H_0)$ a H je $\mathcal{F}$-uzávěr H_0. Pak pro každou hranu $uv \in E(H)$ a pro $1 \leq i \leq k$ leží u a v ve stejné komponentě F_i.*

Důkaz. Dle Lemma 3 existuje v G k-hvozd $\mathcal{F}' = (F'_1, \ldots, F'_k)$ tž. lesy F'_j a F_j mají stejné komponenty pro $j = 1, \ldots, k$ (a tedy $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}|$) a $uv \notin \bigcup \mathcal{F}'$. Pokud by u a v ležely v různých komponentách F_i (a tedy i F'_i), pak bychom přidáním hrany uv do F'_i dostávali k-hvozd v G s více hranami než má $\mathcal{F}$, což je spor. $\square$

Důsledek 5. *Nechť G je graf a $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_k)$ je k-hvozd v G tž. $|\mathcal{F}|$ je největší možné. Nechť H_0 je souvislý podgraf G tž. $\bigcup \mathcal{F}$ je disjunktní s $E(H_0)$ a H je $\mathcal{F}$-uzávěr H_0. Pak $F_i \cap H$ je kostra H pro $i = 1, \ldots, k$.*

Důkaz. Zjevně H je souvislý podgraf. Kdyby $H \cap F_i$ nebyl souvislý, pak existuje hrana $uv \in E(H)$ s konci v různých komponentách $H \cap F_i$. Dle Lemmatu 4 ale u a v leží ve stejné komponentě F_i, a z definice $\mathcal{F}$-uzávěru by tedy v H měla ležet cesta v F_i z u do v. $\square$

Nechť $\mathcal{P}$ je rozdělení vrcholů grafu G. Jako $e(\mathcal{P})$ označme počet hran G s konci v různých částech $\mathcal{P}$.

Věta 6. *Graf G má k hranově disjunktních koster právě tehdy, když každé rozdělení $\mathcal{P}$ vrcholů G splňuje $e(\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$.*

Důkaz. Nechť G má alespoň k hranově disjunktních koster. Pro libovolnou kostru je graf vzniklý kontrakcí částí $\mathcal{P}$ souvislý a má tedy alespoň $|\mathcal{P}| - 1|$ hran; proto $e(\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$.

Pro opačnou implikaci budeme postupovat indukcí; nechť věta platí pro všechny grafy G' s méně než $|V(G)|$ vrcholy. Věta zjevně platí pro grafy s jedním vrcholem, předpokládejme tedy $|V(G)| \geq 2$. Je-li $\mathcal{P}$ rozdělení vrcholů G na části velikosti 1, pak $e(\mathcal{P}) = |E(G)|$ a $|\mathcal{P}| = |V(G)|$, graf G má tedy alespoň $k(|V(G)| - 1)$ hran. Nechť $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_k)$ je k-hvozd v G tž. $|\mathcal{F}|$ je největší možné. Jestliže $|\mathcal{F}| = k(|V(G)| - 1)$, pak $F_1, \ldots, F_k$ jsou hranově disjunktní kostry

Předpokládejme tedy, že $|\mathcal{F}| < k(|V(G)| - 1) \leq |E(G)|$, a tedy existuje hrana $e \in E(G) \setminus \bigcup \mathcal{F}$. Nechť H_0 je podgraf G skládající se jen z hrany e a nechť H je $\mathcal{F}$-uzávěr H_0. Dle Důsledku 5 v H existuje k hranově disjunktních koster $F_1 \cap H, \ldots, F_k \cap H$. Jelikož $e \in E(H)$, podgraf H má alespoň 2 vrcholy.

Nechť G' je graf vzniklý z G kontrakcí H do jednoho vrcholu h (odstraňujeme smyčky, ale necháváme násobné hrany). Pro každé rozdělení $\mathcal{P}'$ vrcholů G' existuje $\mathcal{P}$ vrcholů G se stejným počtem částí (vzniklé nahrazením h vrcholy $V(H)$) tž. $e(\mathcal{P}') = e(\mathcal{P})$. Proto G' splňuje předpoklady věty, a z indukčního předpokladu má G' k hranově disjunktních koster. Jejich zkombinováním s k hranově disjunktními kostrami v H dostáváme k hranově disjunktních koster v G. $\square$

Důsledek 7. *Každý hranově $2k$-souvislý graf má alespoň k hranově disjunktních koster.*

Věta 8. *Graf G je sjednocením nejvýše k lesů právě tehdy, když každá $U \subseteq V(G)$ splňuje $|E(G[U])| \leq k(|U| - 1)$.*

Důkaz. Je-li G sjednocením nejvýše k lesů, pak i každý jeho indukovaný podgraf H se dá rozložit na k hranově disjunktních lesů, a tedy $|E(H)| \leq k(|V(H)| - 1)$.

Pro opačnou implikaci, nechť $\mathcal{F}$ je k-hvozd v G tž. $|\mathcal{F}|$ je největší možné. Jestliže $G \neq \bigcup \mathcal{F}$, zvolme hranu $e \in E(G) \setminus \bigcup \mathcal{F}$. Nechť H_0 je podgraf G skládající se jen z hrany e a nechť H je $\mathcal{F}$-uzávěr H_0. Dle Důsledku 5 lze v H nalézt k hranově disjunktních koster, z nichž ani jedna neobsahuje e. Proto $|E(H)| \geq k(|V(H)| - 1) + 1$, což je spor. $\square$