1. Rozhodněte, zda platí následující: Každé obarvení přirozených čísel dvěma barvami obsahuje nekonečnou monochromatickou aritmetickou posloupnost.

2. Dokažte, že platí následující. Nechť T je konečná podmnožina $\mathbf{Z}^d$ pro nějaké přirozené číslo d, a nechť $\delta > 0$ je reálné číslo. Nechť A je podmnožina $[n]^d$ pro dostatečně velké n. Je-li $|A| \geq \delta n^d$, pak existuje $\vec{a} \in A$ a celé číslo $b \neq 0$ tž. $\vec{a} + b\vec{t} \in A$ pro každé $\vec{t} \in T$. V důkazu můžete předpokládat platnost Lemma o rohu v libovolné dimenzi.

3. Nechť $n_0(\delta)$ je nejmenší přirozené číslo tž. pro každé $n \geq n_0(\delta)$ obsahuje každá podmnožina $[n]$ velikosti alespoň δn tříprvkovou aritmetickou posloupnost. Ukažte, že $n_0(\delta)$ je alespoň $2^{\Omega(\log^2(1/\delta))}$.

4. Nechť (pro $n \geq k$) $\delta_k(n)$ označuje nejmenší reálné číslo takové, že každá podmnožina $[n]$ velikosti alespoň $\delta_k(n)$ obsahuje k-prvkovou aritmetickou posloupnost. Na přednášce jsme si ukázali, že $\delta_3(n) > \frac{1}{16^{\sqrt{\log_2 n}}}$ pro nekonečně mnoho n. Nalezněte co nejlepší dolní odhad na $\delta_k(n)$ pro obecné k.