

1. Mějme dánu čistou stromovou dekompozici grafu  $G$  šířky  $k$  s  $n$  vrcholy. Navrhněte algoritmus, který určí velikost nejmenší dominující množiny grafu  $G$  v čase  $O(k3^k n)$ . Nápověda: pro disjunktní  $X, Y \subseteq \beta(v)$  označme  $d(v, X, Y)$  velikost nejmenší množiny  $S$  v  $G_v$  takové, že  $S \cap \beta(v) = X$  a  $Y$  je množina všech vrcholů  $G_v$  takových, že ani nepatří do  $S$ , ani nemají souseda v  $S$ .
2. Nechtě  $\varphi(G) = \min(10, \chi(G))$ . Ukažte, že pro každé  $k$  má  $\sim_\varphi$  pouze konečně mnoho tříd ekvivalence.
3. Nechtě  $G$  je graf a  $f : V(G) \rightarrow \mathbf{R}^+$  funkce taková, že pro každé  $S \subseteq V(G)$  velikosti nejvýše  $k$  existuje komponenta  $C$  grafu  $G - S$  splňující  $f(V(C)) > f(V(G))/2$ . Nechtě  $\mathcal{B}$  je množina všech neprázdných  $B \subseteq V(G)$  takových, že  $G[B]$  je souvislý a  $f(B) > f(V(G))/2$ . Ukažte, že  $\mathcal{B}$  je bramble v  $G$  řádu alespoň  $k + 1$ .
4. Dokažte, že má-li graf  $G$  stromovou šířku větší než  $3s$ , pak  $G$  obsahuje brambli řádu alespoň  $s + 1$ .