Kombinatorika a grafy II - 2. série

Odevzdávat do: 4.1.2012

Řešení příkladů odevzdávejte cvičícím, v papírové formě (pište **čitelně**) nebo e-mailem (použijte libovolný systém vhodný pro přípravu matematických textů, např. TeX). V řešení nezapomeňte uvést své jméno a číslo příkladu, u vícestránkových řešení nejlépe na každé z jeho stránek. V případě nejasností v zadání se ozvěte (`ook@ucw.cz`).

Příklad 0 [2 body]

Nechť G je graf bez trojúhelníků nakreslený na torus. Ukažte, že $\chi(G) \leq 4$.

Toto je opravená verze příkladu 3 z minulé série. Bude hodnocen následujícím způsobem:

- pokud jste v první sérii našli protipříklad, tvrzení opravili a dokázali jeho korektní formu, dostanete 4 body; řešení tohoto příkladu už znovu neodevzdávejte.
- pokud jste v první sérii našli protipříklad, dostanete za něj jeden bod, a můžete normálně odevzdat řešení tohoto příkladu.
- v libovolném jiném případě vaše řešení příkladu z první série nebude hodnoceno, a můžete odevzdat řešení tohoto příkladu.

Příklad 1 [2 body]

Mějme dvojici rovnoběžných přímek p_1 a p_2 v rovině a množinu úseček U takových, že každá z nich má jeden konec na p_1 a druhý na p_2. Předpokládejme, že konce úseček jsou navzájem různé. Nechť G je průnikový graf této množiny úseček, tj. $V(G) = U$ a dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když se odpovídající úsečky protínají. Ukažte, že G je perfektní.

Příklad 2 [2 body]

Nechť G je graf, $T(x,y) = \sum_{i,j} t_{i,j} x^i y^j$ jeho Tutteho polynom a $c(k)$ jeho chromatický polynom. Ukažte, že má-li G alespoň jednu hranu, pak koeficient T u x (tedy $t_{1,0}$) je roven $(-1)^{|V(G)|} c'(1)$, kde $c'(1)$ je hodnota první derivace c v bodě 1.

Příklad 3 [2 body]

Ukažte, že má-li souvislý graf s n vrcholy minimální stupeň δ, pak obsahuje cestu s alespoň $\min(2\delta + 1, n)$ vrcholy.

Příklad 4 [2 body]

Nechť a_n označuje počet rozdělení čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ na neprázdné části. Tedy například $a_4 = 15$, jelikož možná rozdělení jsou

- {1},{2},{3}, {4}
- {1,2},{3},{4}
- {1,3},{2},{4}
- další 4 varianty {i,j},{k},{l}
- {1,2},{3,4}
- {1,3},{2,4}
- {1,4},{2,3}
- {1},{2,3,4}
- další 3 varianty {i},{j,k,l}
- {1,2,3,4}

Nalezněte explicitní formuli pro exponenciální vytvořující funkci posloupnosti a_0, a_1, ...

Příklad 5 [2 body]

Nechť W je kolo s 6 paprsky (tj. graf vzniklý z kružnice C délky 6 přidáním vrcholu sousedícího se všemi vrcholy C). *Orientace* W je orientovaný graf takový, že zapomeneme-li směry jeho hran, dostáváme W. Kolik má W navzájem neisomorfních orientací?