Jestliže G je graf, pak jako G_{k-1} označme jeho podgraf indukovaný vrcholy stupně $k-1$. Používáme následující tvrzení z předchozí přednášky (graf je *Gallaiův strom*, jestliže každá jeho komponenta 2-souvislosti je úplný graf či lichý cyklus):

Věta 1. *Je-li G k-kritický, pak $\delta(G) \geq k-1$ a každá komponenta G_{k-1} je Gallaiův strom.*

Dále budeme potřebovat následující pozorování (důkaz: indukcí dle počtu komponent 2-souvislosti).

Pozorování 2. *Je-li každá komponenta H Gallaiův strom maximálního stupně nejvýše $k-1$ různý od K_k, pak*

$$|E(H)| \leq \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1}\right)|V(H)|.$$

Gallai dokázal následující odhad pro hustotu k-kritických grafů.

Věta 3. *Je-li G k-kritický a $G \neq K_k$, pak průměrný stupeň G je alespoň*

$$k - 1 + \frac{k-3}{k^2-3}.$$

Důkaz. Nechť X je množina vrcholů grafu G, které mají stupeň $k-1$. Sečteme-li stupně vrcholů v X, dostaneme dvakrát počet hran G_{k-1} plus počet hran spojujících vrchol stupně $k-1$ s vrcholem stupně alespoň k. Počet hran v G s alespoň jedním koncem stupně $k-1$ je tedy roven $(k-1)|X| - |E(G_{k-1})| = (k-1)|V(G_{k-1})| - |E(G_{k-1})|$. Jelikož každá komponenta G_{k-1} je Gallaiův strom (dle Věty 1) maximálního stupně nejvýše $k-1$ a G neobsahuje K_k jako podgraf (jelikož G je k-kritický a různý od K_k), spolu s Pozorováním 2 dostáváme následující odhad na počet hran grafu G.

$$|E(G)| \geq (k-1)|V(G_{k-1})| - |E(G_{k-1})| \geq \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{k-1}\right)|V(G_{k-1})|.$$

Dále zjevně platí

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg v \geq k|V(G)| - |V(G_{k-1})|.$$

Druhou nerovnost vynásobíme $\frac{k}{2} - \frac{1}{k-1}$ a sečteme ji s první. Po úpravách dostáváme

$$2|E(G)| \geq \left(k - 1 + \frac{k-3}{k^2-3}\right)|V(G)|,$$

což je ekvivalentní dokazovanému tvrzení. $\square$

Důsledkem je omezení na počet kritických grafů na plochách.

Věta 4. *Nechť $k \geq 7$. Je-li G k-kritický graf různý od K_k nakreslitelný bez křížení na plochu Eulerovského rodu g, pak*

$$|V(G)| \leq \frac{6g-12}{k-7+\frac{k-3}{k^2-3}}.$$

Důkaz. Z Eulerovy formule plyne, že každý graf (s alespoň třemi vrcholy) nakreslený na plochu rodu g má průměrný stupeň nejvýše

$$6 + \frac{6g-12}{|V(G)|}.$$

Tento odhad zkombinujeme s odhadem z Věty 3. □

Proto lze pro každou pevnou plochu Σ a přirozené číslo $k \geq 7$ v polynomiálním čase rozhodnout, zda graf G nakreslený na Σ lze obarvit $k-1$ barvami – stačí zkontrolovat, zda G obsahuje k-kritický podgraf (nakreslitelný na Σ), těch je ale dle Věty 4 pouze konečně mnoho.

Poznamenejme, že Věta 4 platí i pro $k = 6$, důkaz je ale podstatně složitější. Věta 4 neplatí pro $k = 5$, pokud Σ není rovina: nechť W_n je graf vzniklý z cyklu délky $2n+1$ přidáním dvou sousedních vrcholů spojených se všemi ostatními. Pak W_n je 5-kritický a dá se nakreslit bez křížení na libovolnou plochu rodu alespoň jedna. Zajímavější příklady (vzniklé přidáním hrany mezi vrcholy lichého stupně) plynou z následujícího pozorování.

Lemma 5. *Nechť G je triangulace roviny obsahující právě dva vrcholy u, v lichého stupně. Pak v každém 4-obarvení G mají u a v stejnou barvu.*

Důkaz. Poznamenejme, že nevylučujeme případ, že G obsahuje násobné hrany (ale každá stěna musí mít délku 3, dvě hrany spojující stejné vrcholy tedy nemohou ohraničovat stěnu). Pro spor předpokládejme, že tvrzení neplatí a G je protipříklad s nejmenším počtem vrcholů. Graf G tedy má 4-obarvení φ takové, že $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Pomocí odhadů z Eulerovy formule nahlédneme, že G obsahuje vrchol $w \notin \{u, v\}$ stupně nejvýše 5. Jelikož w má sudý stupeň, máme $\deg w \in \{2, 4\}$. Pokud $\deg w = 2$, pak nechť G' je graf získaný z $G - w$ splácnutím hran vzniklé 2-stěny. Pokud $\deg w = 4$, pak nahlédněme, že w má protilehlé sousedy x a y takové, že $\varphi(x) = \varphi(y)$. Nechť G' je graf vzniklý kontrakcí hran xv a vy a splácnutím hran ve vzniklých 2-stěnách.

V obou případech si rozmyslíme, že G' je triangulace roviny a u a v jsou její jediné vrcholy lichého stupně. Nicméně dle konstrukce má G' 4-obarvení, v němž u a v mají různou barvu, což je spor s předpokladem, že G je nejmenší protipříklad. □